Contrôle continu n° 2

Informatique Fondamentale (IF121) — groupe A13

17 décembre 2003

- Durée : 50 min.
- La notation tiendra compte de la clarté et la présentation des programmes.
- Les deux exercices sont indépendants, ils peuvent être traités dans l'ordre de votre choix.

Exercice 1 : Exponentiation rapide

Soit un nombre réel x et un entier naturel n. On veut calculer x^n par multiplications successives, en effectuant aussi peu de multiplications que possible. On utilise la méthode suivante :

Si $n = 0$,	$x^n = 1$	
Si n est pair et non nul,	$x^n = (x^2)^k$	où $n = 2k$
Si n est impair,	$x^n = x \times (x^2)^k$	où $n = 2k + 1$

Pour calculer une puissance $n^{\text{ème}}$, on se ramène à calculer une puissance $k^{\text{ème}}$ avec $n \approx 2k$; cette méthode permet de calculer x^n en au plus $2 \log_2 n$ multiplications, contre n pour la méthode naïve.

(a) Écrire une méthode `exponentiationRapide`, qui prend comme arguments un nombre réel x et un entier naturel n, et qui renvoie x^n calculée par la méthode décrite ci-dessus.

Indice : on pourra utiliser trois variables : `y` qui vaut successivement x, x^2, $(x^2)^2$, etc. ; `k` qui vaut successivement n, $n/2$, $(n/2)/2$, etc. ; et `r` qui vaut le résultat partiel du calcul.

(b) Démontrer que la valeur renvoyée par la méthode que vous avez écrite est bien x^n où x et n sont les arguments. (Il faudra bien sûr formuler et démontrer un invariant pour la boucle.)

Indice : on pourra utiliser le fait que $(n/2^i)\%2 = (n\%2^{i+1})/2^i$.

(c) Démontrer la terminaison de la boucle écrite en *(a)*.

Exercice 2 : Simulation de trajectoire

Un parachutiste est largué de l'altitude z_0 à vitesse nulle. Au bout d'une durée D, il ouvre son parachute. On considère que le parachutiste tombe verticalement, et on approxime sa vitesse $v(t)$ et son altitude $z(t)$ d'instant en instant de la manière suivante :

$$\begin{cases} z(t + \delta t) = z(t) - v(t)\delta t \\ v(t + \delta t) = v(t) + \left(g - \frac{a(t)}{m} v(t) - \frac{b(t)}{m} v(t)^2\right) \delta t \end{cases}$$

où m est la masse du parachutiste équipé, g l'accélération de la pesanteur, et a et b sont des coefficients qui représentent les frottements de l'air.

Ce système d'équations permet de calculer les valeurs successives de l'altitude et de la vitesse en partant des valeurs connues à la date $t = 0$ ($z(0) = z_0$ et $v(0) = 0$), et en calculant leurs valeurs aux dates δt, $2\delta t$, $3\delta t$, etc. Le paramètre δt mesure la qualité de l'approximation (plus δt est faible, meilleure est l'approximation, mais plus le calcul prend du temps).

On donne $g = 9,81\,\mathrm{m/s^2}$, et les valeurs suivantes des coefficients a et b :

Avant l'ouverture du parachute :	$a = 1\,\mathrm{kg/s}$;	$b = 0,2\,\mathrm{kg\,m}$
Après l'ouverture du parachute :	$a = 5\,\mathrm{kg/s}$;	$b = 2\,\mathrm{kg\,m}$

On prendra comme pas de temps $\delta t = 10^{-3}$ s.

Écrire un programme qui demande à l'utilisateur d'entrer la masse m, la durée avant l'ouverture du parachute D et l'altitude de largage z_0, et qui affiche la durée de la chute (à δt près bien sûr) et la vitesse à laquelle le parachutiste touche le sol.