COURS 421-b, COMPOSITION D'INFORMATIQUE

Philippe Jacquet, Luc Maranget

26 janvier 2007

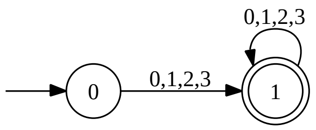
⋆ ⋆ ⋆

Partie I, Base quatre

Dans cet exercice on opère sur le langage des mots construits à partir des chiffres de `0` à `3`. On accepte les zéros superflus en tête de l'écriture des entiers naturels.

Question 1. Donner une expression régulière et un automate fini déterministe qui définissent l'écriture en base 4 des entiers naturels.

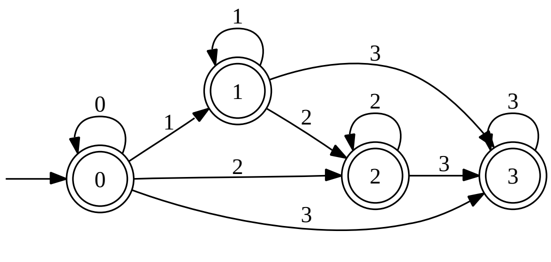
Réponse : L'expression régulière est `[0-3]+` L'automate est



□

Question 2. Donner une expression régulière et un automate fini déterministe qui définissent les suites finies (possiblement vides) de chiffres croissantes au sens large.

Réponse : L'expression régulière est `0*1*2*3*`. L'automate est



□

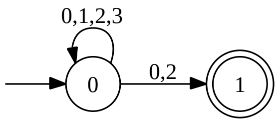
Question 3. Donner une expression régulière qui définit les suites finies non-vides de chiffres croissantes au sens large.

Réponse : Il apparaît que l'on peut distinguer quatre cas, selon le premier chiffre qui existe toujours. L'expression régulière est `0+1*2*3*|1+2*3*|2+3*|3+`. □

Question 4. Donner une expression régulière et un automate fini pas nécessairement déterministe qui définissent les entiers pairs exprimés en base 4.

Réponse : Il s'agit des entiers dont le dernier chiffre est `0` ou `2`.

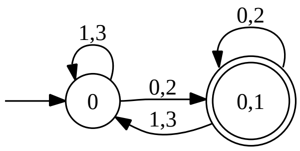
L'expression régulière est donc `[0-3]*[02]`. Un automate fini non-déterministe possible est



□

Question 5. Donner un automate déterministe qui définit le langage de la question précédente.

Réponse : Le plus sûr paraît de déterminiser l'automate réponse de la question précédente.



□

Partie II, Tri pivot

Cette partie décrit l'application aux listes de l'algorithme (classique) du tri pivot. Le problème aborde une difficulté parfois passée sous silence : les éléments des listes ne sont pas forcément deux à deux distincts.

En diverses occasions nous utiliserons la notion d'élément *médian* parmi n éléments $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Un élément médian e est défini comme l'un des a_i qui est tel que l'on peut séparer les a_i (moins e) en deux séquences $b_1, b_2, \ldots, b_m$ et $c_1, c_2, \ldots, c_t$, telles que e majore (au sens large) les b_i, e minore (au sens large) les c_i, et m et t sont aussi proches que possible. Plus précisément, si n est impair, alors m et t sont égaux, tandis que si m est pair, m et t diffèrent de un. Selon notre définition, l'élément médian existe toujours, même quand les a_i ne sont pas deux à deux distincts, mais n'est pas nécessairement unique. Par exemple, si la séquence est « 1, 4, 0, 1 » alors n'importe lequel des éléments de valeur 1 est un élément médian (par exemple a_0), la séquence des éléments majorés étant par exemple « 0 » (a_2), et la séquence des éléments minorés « 4, 1 » (a_1, a_3).

Soit la classe **List** des cellules de listes (d'entiers) :

```
class List {
  int val;
  List next ;

  List(int x, List c) { val = x ; next = c ; }
}
```

Question 6. Écrire une méthode **static List** `lessThan(`**int** `x,` **List** `c)` qui renvoie la liste des éléments de `c` qui sont strictement inférieurs à l'entier `x`.

Réponse :

```
static List lessThan(int x, List c){
  if (c == null)
    return null ;
  else if (c.val < x)
    return new List(c.val, lessThan(x, c.next)) ;
  else
    return lessThan(x, c.next) ;
}
```

□

On définit l'interface **Pred** suivante.

```
interface Pred { boolean test(int y) ; }
```

C'est-à-dire que les objets des classes qui implémentent l'interface **Pred** possèdent une méthode `test` qui prend un entier en argument et renvoie un booléen.

Question 7. Écrire une méthode **static List** `filter(`**Pred** `p,` **List** `c)` qui renvoie la liste des éléments de `c` qui vérifient le prédicat `p`, c'est-à-dire qui sont tels que `p.test(`x`)` renvoie **true**.

Réponse :

```
static List filter(Pred p, List c) {
  if (c == null)
    return null ;
  else if (p.test(c.val))
    return new List (c.val, filter(p, c.next)) ;
  else
    return filter(p, c.next) ;
}
```

□

Question 8. Définir une classe **Lt** qui implémente l'interface **Pred** et qui est telle que :

1. Le constructeur **Lt**`(`**int** `x)` prend un entier en argument.
2. La méthode `test(`**int** `y)` renvoie **true** si $y < x$ et **false** autrement.

Réponse :

```
class Lt implements Pred {
  private int x ;

  Lt(int x) { this.x = x ; }

  public boolean test(int y) { return y < x ; }
}
```

□

Question 9. Récrire `lessThan` (question 6) en une ligne, en utilisant les deux questions précédentes.

Réponse :

```
static List lessThan(int x, List c) {  return filter(new Lt(x), c) ; }
```

□

Question 10. Reprendre la technique de la question précédente, pour cette fois écrire une méthode **static List** `greaterEqual(`**int** `x,` **List** `c)` qui renvoie la liste des éléments de `c` qui sont supérieurs ou égaux à `x`.

Réponse : D'abord définir une classe **Ge** qui réalise le prédicat $y \geq x$.

```
class Ge implements Pred {
  private int x ;

  Ge (int x) { this.x = x ; }
```

```
  public boolean test(int y) { return y >= x ; }
}
```

Et ensuite appeler `filter`.

```
static List greaterEqual(int x, List c) { return filter(new Ge(x), c) ; }
```

□

Question 11. Soient deux listes `c1` et `c2`, triées en ordre croissant et telles que les éléments de la première liste sont tous inférieurs aux éléments de la seconde liste. Sous ces hypothèses, Écrire une méthode **static List** `compose(`**List** `c1,` **List** `c2)` qui renvoie la liste triée en ordre croissant formée des éléments de `c1` et `c2`.

Réponse : Compte tenu des hypothèses, `compose` est la concaténation des listes.

```
static List compose(List c1, List c2){
  if (c1==null)
    return c2 ;
  else
    return new List(c1.val, compose(c1.next,c2)) ;
}
```

□

Nous allons maintenant implémenter un algorithme de tri classique dit tri pivot (dit aussi *quick-sort*). Le principe est le suivant :

1. Si `c` n'est pas vide, son premier élément est le *pivot*.
2. Calculer deux listes regroupant respectivement les éléments inférieurs et supérieurs au pivot.
3. Trier les deux listes de l'étape précédente, puis regrouper les deux listes triées et le pivot.

Question 12. Écrire une méthode **static List** `sort(`**List** `c)` qui renvoie une copie de la liste `c` triée en ordre croissant selon la méthode du pivot. Attention, la description du tri pivot donnée est approximative.

Réponse :

```
static List sort(List c){
  if (c==null)
    return null ;
  else {
    int a = c.val ;
    List cLT = lessThan(a, c.next) ; // NB c.next
    List cGE = greaterEqual(a, c.next) ; // NB c.next
    return compose (sort(cLT), new List(a, sort(cGE))) ;
  }
}
```

□

Question 13. Dans cette question on demande la complexité du tri pivot (nombre de comparaisons entre éléments) dans quelques cas particuliers. On demande un ordre de grandeur asymptotique (notation Θ, poly page 168).

a) Le tri est effectué sur une liste déjà triée de longueur n.

Réponse : Le calcul de `cLt` et `cGE` se fait toujours au prix de $2(n-1)$ comparaisons. Dans les conditions de la question, `cLt` est toujours vide, et `cGE` est une liste croissante de taille $n-1$. On a donc les équations de coût :

$$C(0) = 0, \qquad C(n) = 2(n-1) + C(n-1)$$

Soit finalement :

$$C(n) = 2((n-1) + (n-2) + \cdots + 1) = n(n-1)$$

Soit $\Theta(n^2)$. □

b) On suppose que la liste à trier comprend $n = 2^p - 1$ éléments deux à deux distincts, et que le pivot est toujours un élément médian.

Réponse : Dans ce cas favorable on a les équations de coût :

$$C(0) = 0, \qquad C(2^p - 1) = 2 \cdot (2^p - 2) + 2 \cdot C(2^{p-1} - 1)$$

Ou encore :

$$C(2^p - 1) = 2 \cdot 2 \cdot (2^{p-1} - 1) + 2 \cdot C(2^{p-1} - 1)$$

Soit finalement la somme des $p - 1$ termes suivants :

$$C(2^p - 1) = 2^2 \cdot (2^{p-1} - 1) + 2^3 \cdot (2^{p-2} - 1) + \cdots 2^p \cdot (2^1 - 1)$$

Et donc :

$$C(2^p - 1) = (p-1) \cdot 2^{p+1} - 2^{p+1} + 4$$

Et donc le coût est de l'ordre de $n \cdot \log n$. □

c) On suppose que la liste à trier contient n fois un élément particulier, la longueur de cette liste étant de l'ordre de n.

Réponse : Le tri pivot est en $O(n^2)$ dans le cas général (n longueur de la liste). C'est intuitivement assez clair et relativement facile à montrer par induction (parce que $kn_1^2 + kn_2^2 \leq k(n_1 + n_2)^2$). Cela vaut donc aussi pour le cas particulier ici traité.

Soit e l'élément particulier. Si la liste à trier contient n fois e, une des deux listes fabriquées contiendra n (le pivot ne vaut pas e) ou $n - 1$ (le pivot vaut e) fois l'élément e. La fabrication de cette liste coûte toujours au moins $n - 1$ comparaisons. Une des suites d'appels récursifs est donc de profondeur au moins $n - 1$, chacun des appels effectuant au moins $n - 1$, $n - 2$, ..., jusqu'à 1 comparaisons. Le coût du tri est donc minoré par la somme des $n - 1$ premiers entiers, et donc est en $\Omega(n^2)$.

Au final, le tri est en $\Theta(n^2)$. □

Question 14. On peut améliorer très significativement l'efficacité du tri dans le cas 13-c) ci-dessus, en divisant la liste à trier non plus en deux mais en trois parties. Écrire une nouvelle méthode **static List** `sort(`**List** `c)` améliorée selon cette idée.

Réponse : L'idée est de répartir les éléments de la liste `c` en trois listes, selon qu'ils sont strictement inférieurs au pivot, égaux au pivot, ou strictement supérieurs au pivot. Il nous faut donc deux nouvelles classes de prédicats.

```
class Gt implements Pred {
  private int x ;
  Gt(int x) { this.x = x ; }
  public boolean test(int y) { return y > x ; }
}

class Eq implements Pred {
  private int x ;
  Gt(int x) { this.x = x ; }
  public boolean test(int y) { return y = x ; }
}
```

Puis voici le tri :

```
static List sort(List c) {
  if (c == null)
    return null ;
  else {
    int a = c.val ;
    List cLT = sort(filter(new Lt(a), c.next)) ;
    List cEQ = filter(new Eq(a), c.next) ;
    List cGT = sort(filter(new Gt(a), c.next)) ;
    return compose(cLT, compose(new List(a,cEQ), cGT)) ;
  }
}
```

□

Question 15. Montrer que la nouvelle méthode `sort` (question précédente) peut mieux se comporter que l'ancienne (question 12), dans le cas examiné à la question 13-c).

Réponse : Il suffit de décrire un exemple favorable. On suppose d'abord que le premier pivot est l'élément particulier e, on décompose la liste en trois pour un coût linéaire. Il reste ensuite deux listes à trier dont les longueurs sont, par exemple, toutes deux d'ordre n. Puis, d'après 13-b), il est possible d'atteindre une complexité de l'ordre de $n \log n$ qui domine.

Plus simplement on peut examiner le cas de n éléments identiques, on a d'une part un coût quadratique et d'autre un coût linéaire. □

Partie III, Tri et arbres binaires de recherche

La structure de liste, même triée, ne facilite pas l'opération de recherche d'un élément.

Question 16. Majorer le mieux possible l'ordre de grandeur asymptotique (notation O) de l'opération de recherche dans une liste triée.

Réponse : La recherche est en $O(n)$, comme la recherche dans le cas le pire où l'élément recherché majore strictement tous les éléments de la liste. □

On se donne une structure d'arbre binaire de recherche légèrement étendue. Voici la définition de la classe **Tree** des cellules de ces arbres.

```
class Tree{
  int val ;   // Étiquette de cette cellule
  Tree left, right ; // Sous-arbres gauche et droit

  Tree(Tree left, int val, Tree right) {
    this.val = val ;
    this.left = left ; this.right = right;
  }
}
```

Un arbre **Tree** représente un multi-ensemble (ensemble avec répétition possible des éléments) : le multi-ensemble des étiquettes de toutes ses cellules. Par la suite, nous parlerons parfois du multi-ensemble `a` quand `a` est un objet **Tree**, ainsi que du multi-ensemble `c` quand `c` est un objet **List**.

La structure proposée ici est une légère extension des arbres binaires de recherche du cours dans le sens que l'on impose que, si `a` est un arbre non-vide (`a != null`), alors `a.val` est supérieur *ou égal* à toutes les étiquettes du sous-arbre de gauche `a.left` et inférieur *ou égal* à toutes les étiquettes du sous-arbre de droite `a.right`.

Question 17. Écrire une méthode **static boolean** `mem(`**int** `x,` **Tree** `a)` qui teste la présence de `x` dans le multi-ensemble `a`. Majorer le mieux possible (notation O) le coût de `mem` en fonction d'une caractéristique pertinente de l'arbre `a`.

Réponse : La méthode est identique à celle des arbres binaires de recherche du cours.

```
static Tree mem(int x, Tree a) {
  if (a == null)
    return false ;
  else if (x < a.val)
    return mem(x, a.left) ;
  else if (x > a.val)
    return mem(x, a.right) ;
  else
    return true ;
}
```

La complexité est en $O(d)$ où d est la profondeur de l'arbre définie comme la taille du plus long chemin possible dans l'arbre (zéro pour l'arbre vide, un pour une feuille, etc.) □

Question 18. Écrire une méthode **static Tree** `treeOfList(`**List** `c)` qui construit l'arbre représentant le multi-ensemble `c`. On s'inspirera du tri pivot (question 12).

Réponse :

```
static Tree treeOfList(List c) {
  if (c == null)
    return null ;
  else {
    int a = c.val ;
    return
      new Tree (filter(new Lt(a), c.next),
                a,
                filter(new Ge(a), c.next)) ;
  }
}
```

□

Question 19. Écrire une méthode inverse de la précédente, **static List** `listOfTree(`**Tree** `a)` qui renvoie la liste triée représentant le même multi-ensemble que `a`. On impose un coût linéaire en la taille de `a`.

Réponse :

```
static List scan(Tree a, List k) {
  if (a == null)
    return k ;
  else {
    k = scan(a.right, k) ;
    return scan(a.left, new List(a.val, k)) ;
  }
}

static List listOfTree(Tree a) {
  return scan(a, null) ;
}
```

□

Question 20. Dans cette question on suppose que la liste **List** c est triée en ordre croissant. On cherche alors à créer efficacement un arbre équilibré qui représente le multi-ensemble c.

a) Écrire une méthode **static int** [] arrayOfList(**List** c) qui renvoie un tableau trié dont les éléments sont ceux de la liste c. On impose une complexité linéaire en la longueur de la liste c.

Réponse : Il s'agit de maintenir l'ordre des éléments.

```
static int [] arrayOfList(List c) {
  // Calcul de la longueur de la liste
  int len = 0 ;
  for (List p = c ; p != null ; p = p.next) len++ ;
  // Allouer puis remplir le tableau
  int [] t = new int[len] ;
  int k = 0 ;
  for (List p = c ; p != null ; p = p.next) {
    t[k] = p.val ; k++ ;
  }
}
```

□

b) Écrire une méthode **static Tree** treeOfArray(**int** [] t) qui renvoie un arbre dont les étiquettes sont les éléments de t. On supposera que t est trié en ordre croissant. L'idée est alors la suivante : produire un arbre dont la racine est étiquetée par un élément médian du tableau t. En outre on impose,

- la complexité est linéaire en la longueur de t notée n,
- et l'arbre renvoyé obéit à la condition de profondeur des AVL (page 128 du poly). La preuve de ce dernier point fait l'objet de la question suivante.

Réponse :

```
// Renvoie l'arbre du multi-ensemble t[g...d[
static Tree build(int [] t, int g, int d) {
  if (g >= d)
    return null ;
  else {
    int m = (g+d)/2 ;
    Tree tg = build(t, g, m) ;
    Tree td = build(t, m+1, d) ;
    return new Tree(tg, t[m], td) ;
  }

static Tree treeOfArray(int [] t) {
  return build(t, 0, t.length) ;
}
```

La complexité linéaire de build provient de ce que un appel à build effectue deux appels récursifs sur des tableaux dont la somme des tailles est $n - 1$, ainsi qu'un nombre constant d'opérations élémentaires. □

c) Prouver que votre méthode treeOfArray renvoie bien un arbre équilibré au sens des AVL. **Indication :** normalement, la profondeur des arbres produits s'exprime simplement en fonction de l'unique entier p tel que $2^p \leq n < 2^{p+1}$, défini pour tout $n > 0$.

Réponse : Pour ce qui est de la profondeur, on doit montrer que les profondeurs des deux sous arbres tg et td diffèrent au plus de un. En fait on peut montrer le résultat plus fort suivant. On pose $n = d - g$, n est la longueur du sous-tableau $t[g \ldots d[$. Pour tout entier n non nul, il existe un unique entier p, avec

$$2^p \leq n < 2^{p+1}.$$

Alors la profondeur de l'arbre renvoyé est exactement $p + 1$, en outre les profondeurs des sous-arbres diffèrent au plus de un. La preuve est par induction sur la structure de la méthode `build`.

- Cas de base,
  - Si $n = 0$, alors la profondeur est zéro.
  - Si $n = 1$ ($p = 0$), alors l'arbre est une feuille dont la profondeur est 1.
  - Si $n = 2$ ou $n = 3$ ($p = 1$) alors l'arbre renvoyé est de profondeur 2. Dans le premier cas, les profondeurs des sous-arbres diffèrent de un, dans le second cas, elles sont égales.
- Sinon $p + 1 \geq 2$, alors les sous-arbres `tg` et `td` sont produits par des appels récursifs sur des tableaux de taille $n_g = \lceil (n-1)/2 \rceil$ et $n_d = \lfloor (n-1)/2 \rfloor$ — n_g et n_d sont les deux « moitiés entières » de $n - 1$, n_g étant la plus grande. On constate alors, que l'on a généralement $2^p \leq n_d, n_g < 2^{p+1}$ (auquel cas, par induction, les profondeurs de `tg` et `td` sont égales toutes deux à $p + 1$) ; sauf dans le cas particulier $n = 2^{p+1}$, où on a $n_g = 2^p$ (`tg` de profondeur $p + 1$) et $n_d = 2^p - 1$ (`td` de profondeur p). Dans tous les cas, la profondeur de l'abre renvoyé est $p + 2$.

□

d) En combinant les solutions aux questions a) et b) on produit un arbre équilibré en un temps linéaire. Décrire une méthode plus directe qui se passe du tableau intermédiaire et estimer son coût. On demande une justification plausible de l'estimation et non pas un calcul exact.

Réponse : Si on dispose d'une liste triée `c`, on trouve un élément médian ainsi que les listes des éléments par lui minorés et majorés pour un coût proportionnel à n, longueur de `c`. On procède ensuite comme dans le cas du tableau, par deux appels récursifs sur deux listes de taille moitié.

On peut donc estimer le coût de cette construction en à peu près.

$$C(n) \sim n + 2(C(n/2))$$

Soit un coût de l'ordre de $n \log n$. □

Question 21. On s'intéresse maintenant à la suppression d'éléments de notre structure d'arbre.

a) Écrire une méthode **static int** `getMax(`**Tree** `a)` qui renvoie un élément maximal de `a`. Si un tel élément n'existe pas, la méthode `getMax` est libre de faire ce que bon lui semble.

Réponse :

```
static int getMax(Tree a) {
  if (a.right == null)
    return a.val
  else
    return getMax(a.right) ;
}
```

Si `a` est **null** (multi-ensemble vide), alors la méthode échoue pas très proprement par déréférencement de **null**. □

b) Écrire une méthode **static Tree** `remove(`**int** `x,` **Tree** `a)` qui renvoie un arbre représentant le multi-ensemble représenté par `a`, moins toutes les occurrences de `x`.

Réponse : Une solution inspirée de `remove` des arbres binaires de recherche.

```
// Warning, we must have a != null
// Remove one occurrence of the maximum of a
static Tree removeMax(Tree a) {
```

```
  if (a.right == null) // Found maximum : a.val
    return a.left
  else
    return new Tree (a.left, a.val, removeMax(a.right))

}

static Tree remove(int x, Tree a) {
  if (a == null)
    return null ;
  else if (x < a.val)
    return new Tree(remove(x, a.left), a.val, a.right) ;
  else if (x > a.val)
    return new Tree(a.left, a.val, remove(x, a.right)) ;
  else { // We have x == a.val
    Tree tg = remove(x, a.left) ;
    Tree td = remove(x, a.right) ;
    if (tg == null)
      return td ;
    else
      return new Tree (removeMax(tg), getMax(tg), td) ;
  }
}
```

On note que `removeMax` n'enlève qu'une des occurrences du maximum.

Une solution moins élégante est d'écrire un `removeOne` qui n'enlève qu'une occurrence de `x` (dont le code est plus ou moins celui des transparents de l'amphi 07) puis d'itérer ainsi :

```
static Tree remove(int x, Tree a) {
  while (mem(x,a)) {
    a = removeOne(x, a) ;
  }
  return a ;
}
```

□