° d'ordre :

THESE

présentée

A L'UNIVERSITÉ PARIS VII

pour obtenir

LE DIPLOME DE DOCTEUR DE 3e CYCLE

par

Jean-Jacques LEVY

Spécialité : MATHÉMATIQUES
Mention : INFORMATIQUE ALGÉBRIQUE

RÉDUCTIONS SURES DANS LE LAMBDA-CALCUL

Soutenue le 24 juin 1974 devant la Commission d'examen composée de :

MM. L.	NOLIN	Président
J.M.	CADIOU	Examinateurs
J.Y.	GIRARD	
M.	NIVAT	

Je remercie M. NOLIN de présider mon jury de thèse, M. NIVAT pour avoir suivi le travail présenté dans cette thèse, J.M. CADIOU et J.Y.GIRARD pour avoir bien voulu participer au jury de cette thèse.

Je remercie mes camarades de l'I.R.I.A. , J.M. CADIOU, B. COURCELLE, G. HUET, G. KAHN, F. PRUSKER, J. VUILLEMIN, qui, par leurs multiples conseils, ont permis aux pages suivantes d'exister.

Je remercie D. PARK, qui, en me soumettant un problème posé par P. WELCH, a permis de rendre peut-être plus attrayant le chapître II de cette thèse.

Je remercie Nicole HORNEBECK et Chantal LE MOAL pour la dactylographie de cette thèse.

Table des matières

Préliminaires

Nous allons faire un rappel, aussi bref que possible, des notions élémentaires du λ-calcul que nous utiliserons par la suite.

Définition des λ-expressions :

Soit un alphabet $V = \{ x,y,z \dots \}$, contenant un nombre dénombrable de lettres notées encore $v_1, v_2, v_3, \dots$ et un ensemble $S = \{ (,), \lambda \}$ de symboles particuliers. Le langage Λ des *λ-expressions* est le sous-ensemble minimal de $(S+V)^*$, contenant :

(1)	x	si	$x \in V$
(2)	$(\varepsilon\varepsilon')$	si	$\varepsilon, \varepsilon' \in V$
(3)	$(\lambda x \varepsilon)$	si	$\varepsilon \in \Lambda$

Une expression de la forme (1) est dite être une *variable*, une de la forme (2) une *application* et une de la forme (3) une *abstraction*.

Abréviations :

Nous utiliserons couramment un certain nombre d'abréviations (voir Church [4]) destinées à restreindre l'utilisation abusive des parenthèses.

Règle 1 : L'omission des parenthèses ( ) dans $(\varepsilon\varepsilon')$ est autorisée, quand on peut le faire sans ambiguité, $(\varepsilon\varepsilon')$ pouvant être l'expression complète considérée ou simplement une sous-expression . Pour restaurer de telles parenthèses omises, la règle à suivre est l'association vers la gauche, par exemple :

$f\ x\ y$	est une abréviation de	$((fx)\ y)$
$f\ (xy)$		$(f\ (xy))$
$f\ x\ y\ z$		$(((fx)\ y)\ z)$
$f\ (xy)\ z$		$((f\ (xy))\ z)$
$f\ (\lambda xx)\ y$		$(f(\lambda x.x))y)$

<u>Règle 2</u> : Nous ajoutons à S un nouveau symbole "." et toute sous-formule de la forme :

$\lambda x\ (\varepsilon\varepsilon')$	pourra être notée	$\lambda x.\varepsilon\varepsilon'$
$\lambda x\ (\lambda y\varepsilon)$	" "	$\lambda x.\lambda y\varepsilon$
λxy	" "	$\lambda x.y$

<u>Règle 3</u> : Nous supprimons autant que possible les λ, c'est à dire :

$(\lambda xy.\varepsilon\varepsilon')$	signifie	$(\lambda x.\lambda y.\varepsilon\varepsilon')$	ou	$(\lambda x(\lambda y(\varepsilon\varepsilon')))$
$(\lambda xyz.\varepsilon\varepsilon')$	"	$(\lambda x.\lambda y.\lambda z.\varepsilon\varepsilon')$	ou	$(\lambda x(\lambda y(\lambda z\ (\varepsilon\varepsilon'))))$

etc ...

<u>Règle 4</u> : Nous permettons l'omission des parenthèses les plus externes dans $(\lambda x.\varepsilon)$, ou dans $(\lambda x.\varepsilon\varepsilon')$, ou dans $(\lambda xy.\varepsilon\varepsilon')$, ou dans $(\lambda xyz.\varepsilon\varepsilon')$, etc... quand ces expressions constituent l'expression entière (et non une sous-expression).

<u>Contexte</u> : Un contexte est une λ-expression, dans laquelle une sous-expression n'existe pas. Un contexte est donc une λ-expression avec un trou. Autrement dit, un contexte $C\,[\ ]$ est :

(1) $[\ ]$

(2) $(\varepsilon\ C'[\ ])$ si $\varepsilon \in \Lambda$ et $C'[\ ]$ est un contexte

(3) $(C'[\ ]\ \varepsilon)$ " " " "

(4) $(\lambda x\ C'[\ ])$ si $x \in V$ et $C'[\ ]$ est un contexte

Nous utiliserons pour les contextes les mêmes abréviations que pour les λ-expressions et par exemple :

$$\lambda xy.[\ ]yx \quad \text{signifiera} \quad (\lambda x\ (\lambda y(([\ ]y)x)))$$

Posons $C\,[\ ] = \lambda xy.[\ ]yx$. Par $C\,[\varepsilon]$, si ε est une λ-expression quelconque, nous désignons l'expression obtenue en insérant ε entre les symboles $[\ ]$ du contexte désigné par $C\,[\ ]$, et en supprimant les caractères $[\ ]$ ou en les remplaçant par ( ) selon que la syntaxe des λ-expressions l'exige ou non. Par exemple :

$$C\,[z] = \lambda xy.zyx$$

$$C\,[\lambda x.x] = \lambda xy.(\lambda x.x)yx$$

Nous y montrons que l'interprétation est correcte, en utilisant une idée de *P. Welch* [22,23]. Il s'agit de montrer que toute réduction peut être dépassée par une *réduction fonctionnant de l'intérieur vers l'extérieur*. La démonstration proposée utilise une technique de *Wadswourth* [21], et le résultat est plus fort que celui de *Welch*. Faute de place, nous n'avons pu étudier le rapport qui existe entre le modèle que nous utilisons et les modèles de *Scott* ; mais il semble fort probable qu'un isomorphisme existe avec le modèle E_∞ proposé par *Wadsworth* [21]. Notre modèle $\hat{N}$ est normal, c'est à dire qu'aucune forme normale n'y est égale à une expression sans forme normale.

Dans le *chapître* III, nous nous intéresserons aux règles de calcul sur les λ-expressions. En effet, plusieurs radicaux (c'est à dire des sous expressions de la forme $(\lambda x.M)N$ sur lesquelles on peut effectuer des β-conversions) peuvent coexister dans une même expressions. Comment donc choisir le radical à convertir à chaque étape de calcul, pour obtenir la forme normale d'une expression si elle existe ? Plus généralement on peut définir la valeur calculée par une réduction d'une expression qui a ou qui n'a pas de forme normale. Cette valeur est toujours "moins définie" que la valeur associée à l'expression,dont est issue la réduction,dans l'interprétation (voir *Wadsworth* [21] et *Cadiou* [2]). *Wadsworth* a montré que cette valeur maximale pouvait être atteinte. Nous définirons la notion de *réduction sûre*, analogue à celle de *Vuillemin* [19] pour les programmes récursifs, que nous montrerons suffisante pour que la valeur calculée soit maximale. Ce critère n'est pas décidable, mais certaines règles effectives de calcul le vérifient. En particulier, nous avons montré que certaines règles de calcul plus compliquées que celles qui sont habituellement décrites atteignent la forme normale d'une expression, si elle existe.

INTRODUCTION

Dans cette thèse, nous étendons au lambda calcul muni de la seule opération de béta conversion certains résultats connus pour les schémas de programmes récursifs. Pour ce faire, nous construisons une interprétation purement algébrique des lambda expressions (voir *Nivat* [14]) et nous définissons la notion de réduction sûre (voir *Vuillemin* [19]).

Le lambda calcul, défini par *Church* [4], a suscité de nombreuses études dont le point est fait par *Curry, Feys, Hindley et Seldin* [7, 8] ; c'est un système formel dont les expressions sont engendrées à partir d'un ensemble de variables grâce à deux opérations : 1) l'abstraction par rapport à une variable ; 2) l'application. Ainsi $\lambda x.x+y$, $\lambda y.x+y$, $\lambda xy.x+y$, $\lambda yx.x+y$ désignent des fonctions de x ou de y ou des deux variables à la fois dont la valeur est x+y. Quant à l'application d'une fonction à un argument, elle équivaut à une substitution en vertu d'une règle appelée β-conversion : ainsi ($\lambda x.x+y$)a se réduit à a+y, ($\lambda y.x+y$)a à x+a, ($\lambda xy.x+y$)ab à a+b, ($\lambda yx.x+y$)ab à b+a ; certaines réductions peuvent être plus complexes : $(\lambda x.xx)(\lambda x.xy)$ se réduit à $(\lambda x.xy)(\lambda x.xy)$, puis à $(\lambda x.xy)y$, puis à yy ; etc... On appelle forme normale toute expression irréductible, et il est aisé de vérifier que toute expression n'a pas forcément une forme normale (par exemple ($\lambda x.xx$)($\lambda x.xx$) ou ($\lambda x.f(xx)$)($\lambda x.f(xx)$) ...). *Church* [4] a montré que l'ensemble des procédés de calcul exprimables dans ce formalisme est tout aussi puissant que celui des calculs faits avec une machine de *Turing* (fonctions récursives partielles).

Ce n'est pas d'aujourd'hui qu'on a songé à établir un lien entre le λ-calcul et la sémantique des langages de programmation. Ainsi, le langage LISP, créé par *Mac Carthy* [3], s'inspire fortement du λ-calcul. *Landin* [9] a traduit ALGOL 60 en termes de λ-expressions, interprétant en fait un surensemble de ce langage par sa SECD machine, dont l'opération de base est la β-conversion. *Morris* [12] a montré qu'une relation intéressante sur le langage traduit, à savoir l'équivalence extensionnelle, revenait à identifier les expressions qui, dans tout contexte, ont des comportements identiques lorsque le calcul se termine. *Scott* et *Strachey* [18] ont souligné le fait que les conflits de types qu'on trouve dans les langages de programmation courants sont analogues à ceux qu'on rencontre

dans le λ-calcul. En effet, un programme écrit en langage d'assemblage peut se modifier lui-même ou exécuter des données ; ALGOL 60 admet des procédures qui peuvent prendre des procédures comme argument (par exemple elles-mêmes) ; une fonction LISP est complètement assimilée à une donnée ; des procédures peuvent s'introduire dans les classes de SIMULA ; des langages comme PAL ou GEDANKEN sont purement applicatifs et ne font pas de distinction entre procédure et structure de données ... On peut discuter de l'utilité de telles caractéristiques de programmation. Nous défendons simplement le principe suivant : de tels langages de programmation, qui sont des constructions complexes et empiriques pour une bonne part, existent et sont utilisés;par conséquent, l'étude mathématique de leur sémantique doit être faite. En résumé, on peut dire pour justifier le choix du λ-calcul que traduire les programmes sous la forme de λ-expressions présente trois avantages : 1) revenir à un langage plus simple et néanmoins suffisamment général ; 2) se donner la possibilité de représenter des programmes qui ont des fonctions comme paramètre ou résultat ; 3) ramener à la raison les dispositions des programmes qui conduisent à des effets bizarres en raison de la confusion (volontaire) qu'elles supposent entre programmes et données.

Pour illustrer cette correspondance entre programme et λ-calcul, nous considérerons les deux exemples suivants :

1) Exemple emprunté à *Nolin* [15]. Supposons que l'on dispose d'une procédure ALGOL,D, de dérivation d'une fonction. Soit :

$$\underline{\textit{real}}\ \underline{\textit{procédure}}\ D\ (\ \underline{\textit{procédure}}\ f\ ;\ \underline{\textit{real}}\ x\ ) \Leftarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(\ x+h\ )-f(x)}{h}$$

(Le corps de cette procédure représente n'importe quel programme itératif calculant la limite en question). On se trouve dans l'impossibilité d'écrire la dérivée seconde D2 en fonction de D, sans utiliser de sombres effets de bord. Mais si nous disposons d'un langage proche du λ-calcul, où des fonctions peuvent être le résultat de procédures, nous pouvons écrire :

$$D(f) \Leftarrow \lambda x.\lim_{h \to 0} \frac{f(\ x+h\ )-f(x)}{h}$$

et

$$D2(f)(x) \Leftarrow D(D(f))\ (x)$$

2) Exemple dérivé d'un exemple de *Manna-Ness-Vuillemin* [10]. Soient F et G deux procédure ALGOL 60 définies par :

$$\underline{\textit{integer}}\ \underline{\textit{procédure}}\ F(\ \underline{\textit{procédure}}\ f\ ;\ \underline{\textit{integer}}\ x\ ) \Leftarrow$$
$$\underline{\textit{if}}\ P(f)\ \underline{\textit{then}}\ x\ \underline{\textit{else}}\ H(F(Kf,x))\ ;$$
$$\underline{\textit{integer}}\ \underline{\textit{procédure}}\ G(\ \textit{procédure}\ f\ ;\ \textit{integer}\ x\ ) \Leftarrow$$
$$\underline{\textit{if}}\ P(f)\ \underline{\textit{then}}\ x\ \underline{\textit{else}}\ G(Kf,Hx\ )\ ;$$

Ces deux procédures donnent le même résultat pour toute valeur des arguments (y compris f = F ou f = G) et quelles que soient les procédures P,H,K, pourvu que H ne soit pas une fonction constante (plus précisément $H\Omega = \Omega$ avec les notations que nous introduirons plus loin). Les deux λ-expressions ε_F et ε_G, associées à F et G, seront :

$$\varepsilon_F = Y(\lambda F.\lambda f.\lambda x.\ \underline{if}\ (P(f))\ x\ H(F(Kf)x))$$

$$\varepsilon_G = Y(\lambda G.\lambda f.\lambda x.\ \underline{if}\ (P(f))\ x(G(Kf)(Hx)))$$

où

$$Y = \lambda g.(\lambda x.g(xx))(\lambda x.g(xx)).$$

Jusqu'à présent, nous n'avons fait qu'essayer de justifier le choix du λ-calcul en tant que langage de programmation. Il reste à définir une interprétation des λ-expressions en tant que traductions de programmes. Toute interprétation fondée uniquement sur l'interconvertibilité est trop fine. En effet, des expressions non interconvertibles (c'est à dire qui ne se réduisent pas à une même expression) peuvent avoir un comportement identique dans tout contexte (voir l'exemple précédent). C'est le rôle d'une interprétation "adéquate" que d'identifier de tels éléments ; nous voulons donc, obtenir en premier lieu, une interprétation raisonnable des λ-expressions en tant qu'images de programmes. D'autre part, toute λ-expression n'est qu'une variable, une fonction ou une application d'une fonction à un argument. Le domaine d'interprétation intuitif est donc un espace fonctionnel. On bute, là, sur un des maux dont a souffert longtemps le λ-calcul : l'absence de tout modèle fonctionnel. La difficulté tenait au fait que toute expression peut être considérée comme désignant à la fois une fonction et un objet ; il fallait donc imaginer un domaine D isomorphe à l'ensemble des fonctions de D dans D ! *Scott* [16] proposa une théorie générale de la calculabilité qui lui permit [17] de définir un tel domaine, en restreignant les fonctions envisagées aux fonctions continues pour une certaine topologie. *Wadsworth* [21] a montré que cette interprétation était adéquate.

Dans le *chapître* I de cette thèse, nous rappelerons la *syntaxe* des λ-expressions, en définissant, à la suite de *Wadsworth* [21], les formes normales à gauche.

Dans le *chapître* II, nous construirons un *domaine d'interprétation* des λ-expressions purement algébrique et analogue à celui décrit par *Nivat* [14] et *Vuillemin* [20] pour le cas des schémas de programmes récursifs. L'approche est similaire à celle de *P. Welch*.

Variables libres - Variables liées :

Une même variable x peut avoir plusieurs occurrences dans une expression ε. Pour une occurrence donnée de x dans ε, considérons le contexte C [ ] formé par l'expression ε dans laquelle nous remplaçons cette occurrence de x par [ ]. Nous avons donc $\varepsilon = C[x]$ et nous dirons que cette occurrence de x est une *occurrence liée* de x dans ε, s'il existe deux contextes C' [ ] et C" [ ] tels que : $C[\ ] = C'[\lambda x.C''[\ ]]$. Toute occurrence de x qui n'est pas une occurrence liée est appelée *occurrence libre* de x dans ε.

Une variable qui a des occurrences liées est une *variable liée*. Une variable qui a des occurrences libres est une *variable libre*. Remarquons que dans une même expression une variable peut être à la fois libre et liée. De plus les variables liées d'une expression sont celles qui suivent immédiatement un λ dans cette expression. Les ensembles VARLIB (ε) et VARLIE (ε), des variables libres et liées d'une λ-expression ε, sont exactement définis récursivement de la manière suivante :

$$\begin{cases} \text{VARLIE}(x) = \emptyset \\ \text{VARLIE}(\varepsilon\varepsilon') = \text{VARLIE}(\varepsilon) \cup \text{VARLIE}(\varepsilon') \\ \text{VARLIE}(\lambda x.\varepsilon) = \text{VARLIE}(\varepsilon) \cup \{x\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{VARLIB}(x) = \{x\} \\ \text{VARLIB}(\varepsilon\varepsilon') = \text{VARLIB}(\varepsilon) \cup \text{VARLIB}(\varepsilon') \\ \text{VARLIB}(\lambda x.\varepsilon) = \text{VARLIB}(\varepsilon) - \{x\} \end{cases}$$

Substitution :

Pour deux expressions M et N, et une variable x, la substitution de x par N dans M, notée M [x\N], est définie par :

$$\begin{aligned} x\,[x\backslash N] &= N \\ y\,[x\backslash N] &= y \qquad (x \neq y) \\ (\varepsilon\varepsilon')\,[x\backslash N] &= (\varepsilon\,[x\backslash N]\;\varepsilon'\,[x\backslash N]) \\ (\lambda x.\varepsilon)\,[x\backslash N] &= \lambda x.\varepsilon \\ (\lambda y.\varepsilon)\,[x\backslash N] &= \lambda z.\varepsilon[y\backslash z][x\backslash N] \qquad (x \neq y) \quad \text{où } z \end{aligned}$$

est la variable définie par :

1) si $x \notin$ VARLIB (ε) ou $y \notin$ VARLIB (N), $z = y$

2) sinon z est la première variable dans la liste $v_1, v_2, \ldots$ telle que : $z \notin$ VARLIB $(\varepsilon) \cup$ VARLIB (N)

Autrement dit, $M[x\backslash N]$ est l'expression obtenue en substituant toutes les occurrences libres de x dans M par l'expression N.

Conversions :

α - conversion : toute sous-expression de la forme $\lambda x.\varepsilon$ peut être remplacée par $\lambda y.\varepsilon\,[x\backslash y]$ si $y \notin$ VARLIB (ε).

β - conversion : toute sous-expression de la forme $(\lambda x.M)N$ peut être remplacée par $M[x\backslash N]$

η - conversion : toute sous-expression de la forme $\lambda x.Mx$ peut être remplacée par M si $x \notin$ VARLIB (M)

Toute sous-expression de la forme $\lambda x.\varepsilon$, $(\lambda x.M)N$, $\lambda x.Mx$ (si $x \notin$ VARLIB(M)) est appelée un *radical*. Nous avons donc des α-radicaux, β-radicaux, η-radicaux.

Par la suite, nous ne considérerons que α et β conversions. Intuitivement, α-conversion veut dire renommage des variables muettes que sont les variables liées et β-conversion signifie l'application d'une abstraction à un argument.

Notations :

1) $\varepsilon \to \varepsilon'$ signifie que ε donne ε' par application d'une règle de conversion à un radical R de ε.

2) $\varepsilon \overset{R}{\to} \varepsilon'$ a le même sens que précédemment mais permet de préciser le radical R sur lequel la conversion a eu lieu (Dans une même expression, il peut y avoir, bien sûr, plusieurs radicaux).

3) $\varepsilon \underset{\alpha}{\to} \varepsilon'$ ou $\varepsilon \underset{\beta}{\to} \varepsilon'$ précise le type de la conversion effectuée.

4) $\varepsilon \overset{*}{\to} \varepsilon'$ signifie que ε' s'obtient de ε par un nombre (éventuellement nul) de conversions. Nous dirons encore qu'il y a une *réduction* de ε à ε' ou que ε' est *dérivable de ε*.

Nous combinons ces notations pour obtenir :

$\varepsilon \overset{R}{\underset{\alpha}{\rightarrow}} \varepsilon'$, $\varepsilon \overset{R}{\underset{\beta}{\rightarrow}} \varepsilon'$, $\varepsilon \overset{*}{\underset{\alpha}{\rightarrow}} \varepsilon'$, $\varepsilon \overset{*}{\underset{\beta}{\rightarrow}} \varepsilon'$, $\varepsilon \overset{*}{\underset{\alpha,\beta}{\rightarrow}} \varepsilon'$ dont les sens sont immédiats.

Si $\varepsilon \overset{R}{\underset{\beta}{\rightarrow}} \varepsilon'$, nous dirons encore que ε' s'obtient de ε par *contraction du radical* R de ε, le *contracté* de R dans ε' étant la sous-expression correspondant à R dans ε'.

Convention : Nous ignorons autant que possible par la suite les α-conversions et chaque fois que nous parlerons de conversions ou réductions nous voudrons dire β-conversions ou β-réductions.

Forme normale :

Une expression qui ne contient aucun β-radical est en *forme normale*. Une expression ε a une *forme normale* s'il existe une expression η en forme normale telle que : $\varepsilon \overset{*}{\rightarrow} \eta$

Descendants :

Supposons $\varepsilon \overset{R}{\underset{\beta}{\rightarrow}} \varepsilon'$ avec R = (λx.M)N et considérons un autre radical de ε, S = (λy.P)Q. Les *descendants* ("résidual") de S dans ε' sont définis de la manière suivante :

1) Si R et S sont deux expressions qui ne se recouvrent pas, la réduction de ε à ε' ne touche pas à S. Et dans ε' on retrouve la même expression (λy.P)Q qui est le descendant (unique) de S dans ε'.

2) Si S contient strictement R :

   a) P contient R. Dans ε', après contraction de R, nous retrouvons une sous-expression P' correspondant à P. Et (λx.P)Q se transforme en (λx.P')Q, descendant (unique) de S dans ε'.

   b) Q contient R. Après contraction de R, Q se transforme en Q', sous-expression de ε', et (λx.P)Q se transforme en (λx.P)Q', descendant (unique) de S dans ε'.

3) Si S = R, S n'a aucun descendant dans ε'.

4) Si R contient strictement S :

a) M contient S. Dans ε', ($\lambda x.M$)N a été remplacé par M [x\N] et les occurrences libres de x dans S, sous-expression de M, ont été remplacées par N pour donner une sous-expression (($\lambda y.P$)Q)[x\N], sous-expression de M[x\N] , descendant (unique) de S dans ε'.

b) N contient S. Dans ε', ($\lambda x.M$)N a été remplacé par M[x\N] sous-expression de N, se retrouve autant de fois (éventuellement nul) que N remplace x dans M[x\N] . Toutes ces occurrences de S, dans M[x\N] et donc dans ε', sont les descendants de S dans ε'.

Si $\varepsilon \overset{R}{\underset{\beta}{\to}} \varepsilon'$, nous appelerons *père* d'un radical S dans ε', le radical de ε dont S est un descendant. Si $\varepsilon \overset{*}{\to} \varepsilon'$,les descendants d'un radical S de ε, dans ε', sont obtenus par fermeture de la définition précédente de descendant. Si $\varepsilon \overset{*}{\to} \varepsilon'$, l'*ancêtre* dans ε d'un radical S de ε' est le radical de ε dont S est un descendant. Remarquons que père et ancêtre ne sont pas toujours définis.

Nous dirons que dans une expression ε, une sous-expression R est *à gauche* d'une autre sous-expression S de ε si :

1) R et S sont deux sous-expressions disjointes et R est à gauche de S;

2) R contient S.

Remarquons que dans ces deux cas le bord à gauche de la sous-expression R est à gauche de celui de S.

Remarquons aussi que si R et S sont deux radicaux et si R est à gauche de S et si $\varepsilon \overset{S}{\to} \varepsilon'$, R n'a qu'un seul descendant dans ε'.

Théorème de Church-Rosser

Théorème : Si $\varepsilon \overset{*}{\to} \varepsilon'$ et $\varepsilon \overset{*}{\to} \varepsilon''$ il existe η tel que : $\varepsilon' \overset{*}{\to} \eta$ et $\varepsilon'' \overset{*}{\to} \eta$.

Une démonstration de ce théorème figure dans [4]. Curry [7] le montre dans les hypotèses encore plus générales. Nous n'utiliserons par la suite que cette formulation restreinte, qui ne fait intervenir que α et β conversions.

Corollaire immédiat : Si ε a une forme normale, cette forme normale est unique à des α-conversions près.

Théorème de standardisation :

Définition : On dit qu'une réduction $\varepsilon = \varepsilon_0 \xrightarrow{R_1} \varepsilon_1 \xrightarrow{R_2} \dots \xrightarrow{R_n} \varepsilon_n$ est une (β-) *réduction standard* si, pour tout i ($1 \leq i \leq n-1$), le contracté de R_i dans ε_i est à gauche de R_{i+1}. De ε_0 à ε_n, grossièrement parlant, on contracte les radicaux de la gauche vers la droite, en fait surtout de l'extérieur vers l'intérieur.

Théorème de standardisation : Si $\varepsilon \stackrel{*}{\rightarrow} \varepsilon'$, il existe une réduction standard de ε à ε'.

Une démonstration existe dans Curry [7].

Corollaire immédiat ; Si ε a une forme normale, la réduction normale (consistant à contracter systèmatiquement le radical le plus à gauche) atteint la forme normale.

CHAPITRE I

SYNTAXE

Nous allons nous définir un λ-Ω calcul, c'est à dire un λ-calcul étendu par une constante Ω et introduire quelques notions syntaxiques, dues à Wadsworth [21] et Barendregt [1], qui seront fondamentales par la suite.

1 - Le λ-Ω calcul : définition

1.1. Définition :

Nous étendons le langage Λ des λ-expressions par une constante Ω. Autrement dit, nous considérons l'ensemble Λ_Ω des *λ-Ω-expressions*, comme étant le plus petit ensemble contenant :

(1) x si $x \in V \cup \{\Omega\}$

(2) $\varepsilon\ \varepsilon'$ si $\varepsilon, \varepsilon' \in \Lambda_\Omega$

(3) $\lambda x . \varepsilon$ si $x \in V$ et $\varepsilon \in \Lambda_\Omega$

pour un alphabet V, infini dénombrable, de variables. La constante Ω ne peut être liée. Et *dorénavant* nous ne considérerons plus que des λ-Ω- expressions et nous écrirons Λ à la place de Λ_Ω, confondant λ-expressions et λ-Ω- expressions, tant qu'il n'y aura pas d'ambiguités.

La *longueur d'une expression* ε, $\| \varepsilon \|$, est définie récursivement de la manière suivante :

(i) $\| x \| = 0$ si $x \in V \cup \{\Omega\}$

(ii) $\| \varepsilon\ \varepsilon' \| = \| \varepsilon \| + \| \varepsilon' \| + 1$

(iii) $\| \lambda x . \varepsilon \| = \| \varepsilon \| + 1$ si $x \in V$

pour toutes expressions $\varepsilon, \varepsilon'$.

1.2. Autre définition :

Soit Λ' le plus petit sous-ensemble de Λ contenant :

(1') $\lambda x_1 x_2 \ldots x_m . x \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n$ si $m,n \geq 0$ et $x_i \in V$, $x \in V \cup \{\Omega\}$ et $\varepsilon_j \in \Lambda'$ pour $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$

(2') $\lambda x_1 x_2 \ldots x_m . (\lambda x.M) N \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n$ si $m,n \geq 0$ et $x_i \in V$, $x \in V$ et $M, N, \varepsilon_j \in \Lambda'$ pour $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$

Les expressions de la forme (1') sont dites être en *forme normale à gauche* ("head normal form") ou f.n.g. en abrégé. Les expressions de la forme (2') ne sont pas en f.n.g. Elles contiennent un *radical de tête* ("head redex") $(\lambda x.M)N$. Remarquons que dans les expressions de la première forme, la *variable de tête*, x, peut être libre ou liée ou être la constante Ω.

Remarque 1.2. : $\Lambda = \Lambda'$.

Preuve : 1) $\Lambda' \subset \Lambda$ car Λ' est un sous-ensemble de Λ par définition, les règles de formation de Λ' ne contenant que des applications et abstractions à partir des variables de V et la constante Ω.

2) $\Lambda \subset \Lambda'$. Intuitivement, toute expression de Λ se développe d'abord par application exhaustive de la règle (3), puis par la règle (2), finissant soit sur une variable ou Ω, soit sur une abstraction. Plus rigoureusement, définissons Λ_1, sous-ensemble de Λ, tel que :

$$\Lambda_1 \quad \text{contient} \quad \begin{cases} x & \text{si } x \in V \cup \{\Omega\} \\ \varepsilon\, \varepsilon' & \text{si } \varepsilon, \varepsilon' \in \Lambda \end{cases}$$

Considérons les deux sous-ensembles L et L_1, minimaux, de Λ tels que :

$$L \quad \text{contient} \quad \begin{cases} \varepsilon_1 & \text{si } \varepsilon_1 \in L_1 \\ \lambda x.\varepsilon & \text{si } \varepsilon \in L,\ x \in V \end{cases}$$

et

$$L_1 \quad \text{contient} \quad \begin{cases} x & \text{si } x \in V \cup \{\Omega\} \\ \varepsilon_1\, \varepsilon & \text{si } \varepsilon_1 \in L_1,\ \varepsilon \in L \\ (\lambda x.M)N & \text{si } M,N \in L \text{ et } x \in V \end{cases}$$

Montrons que $\Lambda \subset L$ et $\Lambda_1 \subset L_1$. Soit ε une expression quelconque, par récurrence sur $|| \varepsilon ||$, montrons que :

$\varepsilon \in \Lambda \Longrightarrow \varepsilon \in L$ et $\varepsilon \in \Lambda_1 \Longrightarrow \varepsilon \in L_1$.

Cas de base : $|| \varepsilon || = 0$. Alors $\varepsilon = x \in V \cup \{\Omega\}$ et donc $\varepsilon \in \Lambda$ et $\varepsilon \in \Lambda_1$. Mais aussi $x \in L_1$, donc $x \in L$ et $\varepsilon \in L$ et $\varepsilon \in L_1$.

Cas général : $|| \varepsilon || > 0$.

a) si $\varepsilon \in \Lambda_1$, comme $|| \varepsilon || > 0$, ε est de la forme :

$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_1$ où $\varepsilon_0, \varepsilon_1 \in \Lambda$. Par définition de la longueur, $|| \varepsilon_1 || < || \varepsilon ||$ et, par hypothèse de récurrence, comme $\varepsilon_1 \in \Lambda$, $\varepsilon_1 \in L$. D'autre part, $\varepsilon_0 \in \Lambda$. Trois cas se présentent donc :

1) $\varepsilon_0 = x \in V \cup \{\Omega\}$. Donc $\varepsilon_0 \in L_1$ et $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_1 \in L$.

2) $\varepsilon_0 = \varepsilon_2 \varepsilon_3$ où $\varepsilon_2, \varepsilon_3 \in \Lambda$. Donc $\varepsilon_0 \in \Lambda_1$ et, comme $|| \varepsilon_0 || < || \varepsilon ||$, par hypothèse de récurrence, $\varepsilon_0 \in L_1$ et donc $\varepsilon_0 \varepsilon_1 = \varepsilon \in L$.

3) $\varepsilon_0 = \lambda x.M$ où $M \in \Lambda$. Comme $|| M || < || \varepsilon ||$, par hypothèse de récurrence, $M \in L$ et donc $(\lambda x.M) \varepsilon_1 = \varepsilon \in L$.

b) si $\varepsilon \in \Lambda$, dans le cas où $\varepsilon \in \Lambda_1$, nous venons de montrer que $\varepsilon \in L_1$. Comme $L_1 \subset L$, $\varepsilon \in L$. Si $\varepsilon \in \Lambda$, et si ε n'est pas un élément de Λ_1, nous avons donc ε de la forme : $\varepsilon = \lambda x.\varepsilon'$ où $x \in V$ et $\varepsilon' \in \Lambda$. Comme $|| \varepsilon' || < || \varepsilon ||$, par hypothèse de récurrence $\varepsilon' \in L$ et $\varepsilon = \lambda x.\varepsilon' \in L$

Considérons, à présent, les sous-ensembles minimaux, L' et L'_1, de Λ générés par les règles suivantes :

L' contient $\lambda x_1 x_2 \ldots x_m . \varepsilon_1$ si $x_i \in V$, $\varepsilon_1 \in L'_1$, $1 \leq i \leq m$

L'_1 contient $\begin{cases} x \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n & \text{si } x \in V \cup \{\Omega\}, \ \varepsilon_j \in L' \\ (\lambda x.M) N \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n & \text{si } x \in V \text{ et } M, N, \varepsilon_j \in L' \end{cases}$

pour $1 \leq j \leq n$. m et n étant positifs ou nul, quelconques.

Il est clair que $L = L'$ et $L_1 = L'_1$, et que $L' = \Lambda'$. Nous avons donc $\Lambda \subset L = L' = \Lambda'$. Donc $\Lambda \subset \Lambda'$. $\square$

Nous venons donc de montrer que les deux définitions par les règles (1),(2),(3) et (1'),(2') du langage des λ-Ω-expressions sont identiques. Par la suite, nous utiliserons surtout la deuxième définition et nous nous servirons, donc, abondamment de la notion de forme normale à gauche.

2 - Quelques propriétés des formes normales à gauche :

2.1. Définition :

Une λ-expression ε est dite *avoir une forme normale à gauche* (en abrégé avoir une f.n.g.) s'il existe η tel que $\varepsilon \overset{*}{\to} \eta$ et η est en f.n.g..

Remarquons que ε peut ne pas être en f.n.g..

2.2. Equivalence sur les f.n.g.

Nous dirons que deux f.n.g. t et t' sont équivalentes ou ont la même tête, si et seulement si :

$$t = \lambda x_1 x_2 \ldots x_m .\ x\ \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n$$

$$t = \lambda y_1 y_2 \ldots y_m .\ y\ \varepsilon'_1 \varepsilon'_2 \ldots \varepsilon'_n$$

et par un renommage des x_i et y_i , il existe u et u' tels que :

$$t \overset{*}{\underset{\alpha}{\to}} u = \lambda z_1 z_2 \ldots z_m . z\ \eta_1 \eta_2 \ldots \eta_n$$

$$t' \overset{*}{\underset{\alpha}{\to}} u' = \lambda z_1 z_2 \ldots z_m . z\ \eta'_1\ \eta'_2 \ldots \eta'_n .$$

Nous écrirons $t \simeq t'$, pour "t équivalent à t'". Et, fidèles à notre à notre convention d'ignorer les α-conversions, nous aurons :

$$t \simeq t' \Leftrightarrow \text{et} \begin{cases} t = \lambda x_1 x_2 \ldots x_m . x \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n \\ t' = \lambda x_1 x_2 \ldots x_m . x\ \varepsilon'_1 \varepsilon'_2 \ldots \varepsilon'_n \end{cases}$$

Remarquons qu'il est clair que $\simeq$ est bien une relation d'équivalence.

2.3. Proposition :

Si $\varepsilon \overset{*}{\rightarrow} t$ et $\varepsilon \overset{*}{\rightarrow} t'$ et si t et t' sont deux f.n.g, alors $t \simeq t'$. (Wadsworth)

Preuve : Immédiate par application du théorème de Church-Rosser. Si $\varepsilon \overset{*}{\rightarrow} t$ et $\varepsilon \overset{*}{\rightarrow} t'$, d'après ce théorème, il existe u tel que $t \overset{*}{\rightarrow} u$ et $t' \overset{*}{\rightarrow} u$. Comme t est en f.n.g. , $t \simeq u$. En effet, si $t = \lambda x_1 x_2 \ldots x_m . x \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n$, la réduction de t à u ne peut contracter que des radicaux internes au ε_i et donc $u = \lambda x_1 x_2 \ldots x_m . x \eta_1 \eta_2 \ldots \eta_n$. De même, comme t' est en f.n.g., $t' \simeq u$. Donc par transitivité, $t \simeq t'$. □

2.4. Proposition :

Si ε a une f.n.g., il existe une f.n.g., t_g dérivable de ε telle que pour toute expression t en f.n.g., telle que $\varepsilon \overset{*}{\rightarrow} t$.

Preuve : Soit

$\varepsilon = \varepsilon_0 \xrightarrow{R_1} \varepsilon_1 \xrightarrow{R_2} \varepsilon_2 \rightarrow \ldots \xrightarrow{R_n} \varepsilon_n = \varepsilon'$ une réduction standard et supposons ε non en f.n.g. et R_1 différent du radical de tête de ε. (R_i est le radical contracté permettant de passer de ε_{i-1} à ε_i). Montrons que ε' ne peut être alors en f.n.g..

En effet, comme R_1 n'est pas le radical de tête T de ε_0, T est forcément à gauche de R_1 et il existe donc un descendant unique de T, soit T', dans ε_1. De plus, T' est le radical de tête de ε_1. Et comme la réduction est standard, le contracté de R_1 dans ε_1 est à gauche de R_2, c'est à dire T' est à gauche de R_2. Donc ε_1 n'est pas en f.n.g, R_2 est différent de T' radical de tête de ε_1, et la réduction $\varepsilon_1 \xrightarrow{R_2} \varepsilon_2 \quad \ldots \xrightarrow{R_n} \varepsilon_n = \varepsilon'$ est standard. Cette réduction a donc une longueur n-1. Par récurrence donc, ε' n'est pas en f.n.g. Le cas de base de la récurrence (n = 0) est immédiat.

Supposons, à présent que $\varepsilon \overset{*}{\rightarrow} t$ et t est en f.n.g. Le théorème de standardisation affirme qu'il existe une réduction standard de ε à t. Soit $\varepsilon = \varepsilon_0 \xrightarrow{R_1} \varepsilon_1 \xrightarrow{R_2} \ldots \xrightarrow{R_n} \varepsilon_n = t$ cette réduction standard et t est en f.n.g donc nous venons de voir que R_1 doit être le radical de gauche de ε_0, sinon t ne peut être en f.n.g. De même pour ε_1 ... soit ε_j, le premier des ε_i (j minimum) tel que ε_j est en f.n.g. Posons $t_g = \varepsilon_j$. On a obtenu t_g, à partir de ε_0, en contractant systématiquement le radical de tête. t_g est donc indépendant de l'expression t, en f.n.g., considérée. Et pour toute expression t, en f.n.g., dérivable de ε, nous avons $t_g \overset{*}{\rightarrow} t$.□

Corollaire : Si ε a une f.n.g., la réduction normale (contractant toujours le radical le plus à gauche) atteint une f.n.g. et cette f.n.g. est la f.n.g. "minimale" t_g.

Preuve : Contenue dans la preuve précédente.□

3 - Conclusion :

Les formes normales à gauche, que Wasdworth a introduites, (encore appelées termes solvables chez Barendregt) ont un comportement identique aux formes normales. Elles sont uniques, modulo la relation $\simeq$, et il existe un moyen standard, la réduction normale, pour en obtenir une. Toutefois, il existe une forme normale à gauche, pour une expression donnée, qui est, en quelque sorte, minimale, c'est celle que l'on obtient par la réduction normale (ou réduction du radical le plus à gauche). Nous préciserons davantage, dans le chapitre suivant, cet aspect minimal de cette f.n.g., en suivant Wadsworth et parlant ainsi d'approximations d'une expression et plus tard de la valeur obtenue par une réduction.

Chapitre II. Sémantique

Nous allons définir un sous-ensemble N des λ - Ω -expressions qui ont une "information finie". Cet ensemble servira de base à un ensemble $\tilde{N}$, domaine d'interprétation de toutes les λ - Ω - expressions. Nous définirons une sémantique, c'est-à-dire une fonction de Λ dans $\hat{N}$ et nous vérifierons que cette sémantique est "adequate", dans le sens de Milner [11].

1) N : ensemble des points d'information finie :

1.1. Approximation directe : (Wadsworth)

1.1.1. Définition :

Soit ϕ , une fonction de Λ dans Λ ($\phi:\Lambda \to \Lambda$), telle que, pour tout ε de Λ , $\phi(\varepsilon)$ est l'expression obtenue en remplaçant tous les radicaux de ε par Λ et en appliquant, autant que possible, les deux ω-règles suivantes :

(1) toute sous-expression de la forme $\Omega\varepsilon$ est remplacée par Ω.

(2) toute sous-expression de la forme $\lambda x.\Omega$ est remplacée par Ω.

$\phi(\varepsilon)$ est l'approximation directe de ε. Par la suite, nous omettrons parfois des parenthèses, désignant par $\phi\varepsilon$, en fait $\phi(\varepsilon)$. Une remarque plus importante est que cette définition de ϕ a bien un sens. En effet, si $\psi(\varepsilon)$ désigne l'expression obtenue en remplaçant tous les radicaux de ε par Ω. En fait, seuls les radicaux les plus externes sont remplacés. De $\psi(\varepsilon)$ à $\phi(\varepsilon)$, il faut appliquer exhaustivement les deux ω-règles. Remarquons, donc, que : 1) ce processus se termine, car les deux ω-règles diminuent à chaque application la longueur de l'expression ; 2) le résultat obtenu, après applications successives de ces règles, est indépendant de l'ordre dans lequel elles ont été appliquées et ce résultat est, donc, unique et ϕ est bien une fonction (univoque). (Les deux ω-règles ont une propriété "Church-Rosser").

1.1.2. <u>Propriétés de l'approximation directe</u> :

1.1.2.1. <u>Proposition</u> :

Si ε est une f.n.g. de variable de tête différente de Ω, soit :

$$\varepsilon = \lambda x_1 x_2 \dots x_m . x \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n \qquad (x \neq \Omega)$$

alors

$$\phi\varepsilon = \lambda x_1 x_2 \dots x_m . x(\phi\varepsilon_1)(\phi\varepsilon_2)\dots(\phi\varepsilon_n)$$

<u>Démonstration</u> :

Immédiate d'après la définition de ϕ. □

1.1.2.2. <u>Proposition</u> :

Les deux clauses suivantes sont équivalentes :

(a) $\phi\varepsilon = \Omega$

(b) ε n'est pas en f.n.g. ou ε est une f.n.g de variable de tête Ω.

<u>Démonstration</u> : Immédiate aussi.

(b) => (a). Si ε n'est pas en f.n.g, alors ε est de la forme :

$\varepsilon = \lambda x_1 x_2 \dots x_m . (\lambda x.M) N \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n$ et

$\psi(\varepsilon) = \lambda x_1 x_2 \dots x_m . \Omega(\psi\varepsilon_1)(\psi\varepsilon_2)\dots(\psi\varepsilon_n)$ et par application des ω-règles, d'abord de type (1) pour éliminer les $(\psi\varepsilon_i)$, puis de type (2) pour éliminer les λ, on obtient $\phi\varepsilon = \Omega$. Sinon, si ε est en f.n.g. de variable de tête Ω,

$$\varepsilon = \lambda x_1 x_2 \dots x_m . \Omega \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n$$

et

$$\psi\varepsilon = \lambda x_1 x_2 \dots x_m . \Omega(\psi\varepsilon_1)(\psi\varepsilon_2)\dots(\psi\varepsilon_n)$$

d'où $\phi\varepsilon = \Omega$ pour les mêmes raisons que précédemment.

(a) => (b). Si $\phi\varepsilon = \Omega$, ε ne peut être en f.n.g de variable de tête distincte de Ω, car, alors, d'après 1.1.2.1., on aurait

$$\varepsilon = \lambda x_1 x_2 \dots x_m . x \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n \qquad (x \neq \Omega)$$

et $\varepsilon = \lambda x_1 x_2 \dots x_m . x(\phi\varepsilon_1)(\phi\varepsilon_2)\dots(\phi\varepsilon_n)$

Donc $\phi\varepsilon \neq \Omega$ et ε ne peut être que dans l'une des deux formes restantes, à savoir en f.n.g avec Ω comme variable de tête ou non en f.n.g. □

1.1.2.3. Proposition :

Si $\phi\varepsilon \neq \Omega$, ε est en f.n.g avec une variable de tête distincte de Ω.

Démonstration :

Corollaire de la proposition précédente. □

1.1.3. Conclusion :

Nous avons utilisé une définition de l'approximation directe, qui est une très légère extension de celle de Wadsworth, puisque nous considérons un λ-Ω-calcul. Et nous retrouvons, bien sûr, les mêmes propriétés. Sous la constante Ω, il faut naturellement comprendre une valeur indéfinie. Et $\phi(\varepsilon)$ représente l'information qu'a une expression ε, tant que ses radicaux n'ont pas été "calculés". Les deux ω-règles signifient (1) que "indéfini" appliqué à une expression ε donne "indéfini", (2) que la fonction qui donne la valeur "indéfinie" quelque soit la valeur de l'argument est confondu avec "indéfini". On s'attend donc à gagner de l'information, au fur et à mesure que l'on fait des conversions sur une expression ε. Mais, auparavant nous nous intéresserons à la structure de l'ensemble image, $\phi(\Lambda)$, par ϕ de Λ.

1.2. Définition et structure de N.

1.2.1. Définition : $\boxed{N = \phi(\Lambda)}$. Autrement dit, nous désignons par N l'ensemble image par la fonction ϕ d'approximation directe du langage des λ-Ω-expressions.

Remarquons que N est un sous-ensemble de Λ, car ϕ est de type $\Lambda \to \Lambda$.

1.2.2. Proposition : Soit N' le plus petit sous ensemble de Λ contenant :

(1) Ω

(2) $\lambda x_1 x_2 \ldots x_m . x a_1 a_2 \ldots a_n$ si m, n ≥ 0 et x_i, $x \in V$ et $a_j \in N'$ pour $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

Alors $N = N'$.

Démonstration : 1) $N \subset N'$. Ou encore si $\varepsilon \in \Lambda$, alors $\phi(\varepsilon) \in N'$. Montrons le par une induction sur la longueur de ε, qui peut avoir deux formes (voir I.1.2.) :

Cas 1 : ε n'est pas en f.n.g.D'après 1.1.2.2., $\phi(\varepsilon) = \Omega$. Et donc $\phi(\varepsilon)$ est dans N'.

Cas 2 : ε est en f.n.g. Soit :

$$\varepsilon = \lambda x_1 x_2 \ldots x_m . x \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n$$

ou $$\varepsilon = \lambda x_1 x_2 \ldots x_m . \Omega \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n .$$

Dans ce dernier cas $\phi(\varepsilon) = \Omega$ et $\phi(\varepsilon) \in N'$. Sinon :

$$\phi(\varepsilon) = \lambda x_1 x_2 \ldots x_m . x(\phi\varepsilon_1)(\phi\varepsilon_2)\ldots(\phi\varepsilon_n)$$

d'après 1.1.2.1., et comme la longueur de $\varepsilon_i (1 \leq i \leq n)$ est plus petite que celle de ε. Par hypothèse d'induction, nous savons que $\phi(\varepsilon_i) \in N'$, donc $\phi(\varepsilon) \in N'$. La cas de base de l'induction étant le cas 2 où n = 0, démontré par la même occasion.

2) $N' \subset N$. Preuve immédiate également. Soit a un élément N', montrons par induction sur la longueur de a, qu'il existe ε dans Λ tel que $\phi(\varepsilon) = a$.

Cas 1 : $a = \Omega$. On a $\phi((\lambda x.x)x) = \Omega$.

Cas 2 : $a = \lambda x_1 x_2 \ldots x_m . x a_1 a_2 \ldots a_n$. Par hypothèse d'induction, il existe des ε_i, dans Λ, tels que $\phi(\varepsilon_i) = a_i$. Et donc si

$\varepsilon = \lambda x_1 x_2 \ldots x_m . x \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n$, on a :

$$\begin{aligned}\phi(\varepsilon) &= \lambda x_1 x_2 \ldots x_m . x(\phi\varepsilon_1)(\phi\varepsilon_2)\ldots(\phi\varepsilon_n) && \text{(par 1.1.2.1.)}\\ &= \lambda x_1 x_2 \ldots x_m . x a_1 a_2 \ldots a_n && \text{(hypothèse d'induction)}\\ &= a \qquad \square.\end{aligned}$$

N peut donc être considéré comme l'ensemble des ω -β-formes normales. En effet, toute expression de N ne contient aucune sous-expression qui n'est un radical-β, de la forme $(\lambda x.M)N$, ni un radical-ω , de la forme $\lambda x.\Omega$ ou $\Omega\varepsilon$, sur laquelle une β-conversion ou une des deux ω-règles peut être appliquée.

Nous avons considéré dans la démonstration précédente deux types de longueurs : 1) la longueur d'une expression définie en I. 2) la longueur sur le sous-ensemble des approximants que nous définirons d'une manière légèrement différentes. En effet pour $a \in N$, $||a||$, la longueur de a, sera définie par :

$$||\Omega|| = 0$$

$$||\lambda x_1 x_2 \ldots x_m . x a_1 a_2 \ldots a_n|| = 1 + \sum_{i=1}^{n} ||a_i||$$

Nous avons introduit, bien sûr, une ambiguité entre la longueur sur Λ et la longueur sur N, notée dans les deux cas de la même manière, mais par la suite l'utilisation de l'une ou l'autre des longueurs sera bien claire selon le contexte.

1.2.3. Ordre sur N: Si a et b sont deux éléments de N, nous dirons que $a < b$ si et seulement si b peut s'obtenir de a par la substitution de certains Ω de a par certaines expressions de N.

Plus précisément :

$$a < b \iff \left|\begin{array}{l} \quad a = \Omega \\ \quad \underline{\text{ou}} \\ \text{et} \begin{array}{l} a = \lambda x_1 x_2 \ldots x_m . x a_1 a_2 \ldots a_n \\ b = \lambda x_1 x_2 \ldots x_m . x b_1 b_2 \ldots b_n \end{array} \\ \text{et} \quad a_i < b_i \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n. \end{array}\right.$$

Souvenons nous que nous ignorons les α-conversions. Cette définition de l'ordre est purement syntaxique et ne fait appel à aucune interprétation. Nous nous éloignons donc de l'ordre considéré par Wadsworth [ ]. D'autre part, il est clair que $<$ est bien un ordre.

1.2.4. Structure de N :

1.2.4.1. Lemme : si $a < b$ et $a \neq \Omega$, où $a, b \in N$, alors $a \simeq b$.

Démonstration : immédiate. En effet, d'après la définition précédente de l'ordre, comme $a \neq \Omega$:

$$a = \lambda x_1 x_2 \ldots x_m . x a_1 a_2 \ldots a_n$$

$$\text{et} \quad b = \lambda x_1 x_2 \ldots x_m . x b_1 b_2 \ldots b_n$$

Donc $a \simeq b$ (cf : définition de $\simeq$ en I). □

1.2.4.2. Proposition : N a une structure d'inf-treillis, ou plus exactement :

1) il existe un élément minimum

2) toute paire d'éléments a et b de N possède un plus grand minorant commun, Min(a,b), défini de la manière suivante

$$\mathrm{Min}(a,b) = \begin{cases} \Omega \text{ si } a = \Omega \text{ ou bien } b = \Omega \text{ ou } a \not\simeq b \\ \lambda x_1x_2\ldots x_m.x(\mathrm{Min}(a_1,b_1))\ldots(\mathrm{Min}(a_n,b_n)) \\ \text{si } a \simeq b \text{ et } a = \lambda x_1x_2\ldots x_m.xa_1a_2\ldots a_n \\ \qquad\quad \text{et } b = \lambda x_1x_2\ldots x_m.xb_1b_2\ldots b_n \end{cases}$$

Démonstration : 1) Elément minimum. $\Omega < a$ pour tout a de N.

2) Plus grand minorant commun.

a) $\mathrm{Min}(a,b) < a$. Démonstration par récurrence sur la taille de Min(a,b).

Cas de base : $\mathrm{Min}(a,b) = \Omega < a$, pour tout a de N.

Cas général : $\mathrm{Min}(a,b) = \lambda x_1x_2\ldots x_p.xm_1m_2\ldots m_q$. Par définition de la fonction Min, nous savons qu'alors :

$$a = \lambda x_1x_2\ldots x_p.xa_1a_2\ldots a_q$$
$$b = \lambda x_1x_2\ldots x_p.xb_1b_2\ldots b_q$$

et $m_i = \mathrm{Min}(a_i,b_i)$ pour tout i $1 \leq i \leq q$. La longueur des m_i est plus petite que celle de Min(a,b) et donc par hypothèse d'induction :

$$m_i = \mathrm{Min}(a_i,b_i) < a_i.$$

D'où par définition de l'ordre sur N, $\mathrm{Min}(a,b) < a$.

b) $\mathrm{Min}(a,b) = \mathrm{Min}(b,a) < b$, la fonction Min étant bien sûr symétrique.

c) si $a,b,c \in N$, montrons :

$c < a$ et $c < b \Rightarrow c < \mathrm{Min}(a,b)$, par une induction sur la longueur de c.

Cas de base : $c = \Omega$. Immédiat car $\Omega < \mathrm{Min}(a,b)$.

Cas général : $c = \lambda x_1x_2\ldots x_m.xc_1c_2\ldots c_n$. Par définition de l'ordre nous savons que :

$$a = \lambda x_1x_2\ldots x_m.xa_1a_2\ldots a_n$$
$$b = \lambda x_1x_2\ldots x_m.xb_1b_2\ldots b_n$$

avec $c_i < a_i$ et $c_i < b_i$ pour tout i, $1 \leq i \leq n$. La longueur de c_i est plus petite que celle de c, et par hypothèse d'induction :

$$c_i < \mathrm{Min}(a_i, b_i)$$

Par définition de l'ordre,

$$c < \lambda x_1 x_2 \ldots x_m . x(\mathrm{Min}(a_1, b_1)) \ldots (\mathrm{Min}(a_n, b_n))$$

$$= \mathrm{Min}(a,b) \text{ (par définition de Min).} \quad \square$$

1.2.4.3. <u>Proposition</u> : Toute paire d'éléments a et b, de N, ayant au moins un majorant commun a un plus petit majorant commun, Max(a,b), défini par :

$$\mathrm{Max}(a,b) = \left\{ \begin{array}{l} a \text{ si } b = \Omega \\ b \text{ si } a = \Omega \\ \lambda x_1 x_2 \ldots x_m . x(\mathrm{Max}(a_1, b_1)) \ldots (\mathrm{Max}(a_n, b_n)) \\ \text{si } a \simeq b \text{ et } a = \lambda x_1 x_2 \ldots x_m . x a_1 a_2 \ldots a_n \\ \qquad\qquad \text{et } b = \lambda x_1 x_2 \ldots x_m . x b_1 b_2 \ldots b_n \end{array} \right.$$

<u>Démonstration</u> :

a) Max est une fonction totale sur toute paire a,b d'éléments, ayant un majorant commun c. Montrons le, par récurrence sur la longueur de c.

<u>Cas de base</u> : $c = \Omega$. Alors $a = b = \Omega < c = \Omega$. Et $\mathrm{Max}(a,b) = \Omega$.

<u>Cas général</u> : $c = \lambda x_1 x_2 \ldots x_m . x c_1 c_2 \ldots c_n$. Si $a = \Omega$ ou $b = \Omega$, Max(a,b) est défini. Supposons $a \neq \Omega$ et $b \neq \Omega$. D'après 1.2.4.1., comme $a < c$ et $b < c$, nous avons $a \simeq b \simeq c$. Soit :

$$a = \lambda x_1 x_2 \ldots x_m . x a_1 a_2 \ldots a_n$$

$$b = \lambda x_1 x_2 \ldots x_m . x b_1 b_2 \ldots b_n$$

et, $a_i < c_i$ et $b_i < c_i$ pour $1 \leq i \leq n$. Par hypothèse de récurrence, comme la longueur de c_i est plus petite que celle de c, $\mathrm{Max}(a_i, b_i)$ est défini et donc :

$$\mathrm{Max}(a,b) = \lambda x_1 x_2 \ldots x_m . x(\mathrm{Max}(a_1, b_1)) \ldots (\mathrm{Max}(a_n, b_n)) \text{ est défini.}$$

b) $a < \mathrm{Max}(a,b)$. Preuve par récurrence sur la longueur de a.

<u>Cas de base</u> : $a = \Omega < b = \mathrm{Max}(\Omega,b) = \mathrm{Max}(a,b)$

<u>Cas général</u> : $a = \lambda x_1 x_2 \ldots x_m . x a_1 a_2 \ldots a_n$.

Si $b = \Omega$, alors $a < a = \mathrm{Max}(a,\Omega) = \mathrm{Max}(a,b)$. Sinon, comme il existe c tel que : $a < c$, $b < c$, on sait que $a \simeq b \simeq c$ et :

$$b = \lambda x_1 x_2 \ldots x_m . x b_1 b_2 \ldots b_n$$

De plus :

$$\mathrm{Max}(a,b) = \lambda x_1 x_2 \ldots x_m . x(\mathrm{Max}(a_1,b_1)) \ldots (\mathrm{Max}(a_n,b_n))$$ par définition de Max. La longueur de a_i, pour $1 \le i \le n$, est plus petite que celle de a, et par récurrence, on a, par hypothèse :

$$a_i < \mathrm{Max}(a_i,b_i)$$

d'où $\quad a < \mathrm{Max}(a,b)$.

c) $b < \mathrm{Max}(b,a) = \mathrm{Max}(a,b)$, car Max est symétrique.

d) si $a,b,c \in N$, montrons :

$a < c$ et $b < c \Rightarrow \mathrm{Max}(a,b) < c$, par une récurrence sur la longueur de c.

<u>Cas de base</u> : $c = \Omega$. Alors $a = b = \mathrm{Max}(a,b) = \Omega < \Omega = c$.

<u>Cas général</u> : $c = \lambda x_1 x_2 \ldots x_m . x c_1 c_2 \ldots c_n$.

Si $a = \Omega$, $\mathrm{Max}(a,b) = \mathrm{Max}(\Omega,b) = b < c$. De même, si $b = \Omega$. Sinon, si a et b sont tous les deux distincts de Ω, on a : $a \simeq b \simeq c$ et donc :

$$a = \lambda x_1 x_2 \ldots x_m . x a_1 a_2 \ldots a_n$$
$$b = \lambda x_1 x_2 \ldots x_m . x b_1 b_2 \ldots b_n$$

et

$$\mathrm{Max}(a,b) = \lambda x_1 x_2 \ldots x_m . x(\mathrm{Max}(a_1,b_1)) \ldots (\mathrm{Max}(a_n,b_n))$$

De plus $a < c$ et $b < c$, c'est-à-dire $a_i < c_i$ et $b_i < c_i$ pour $1 \le i \le n$. Par hypothèse, comme la longueur de c_i est plus petite que celle de c, on a :

$$\mathrm{Max}(a_i,b_i) < c_i$$

d'où, par définition de l'ordre,

$$\mathrm{Max}(a,b) < c. \quad \square$$

1.2.5. Conclusion : Nous avons isolé, dans l'ensemble des λ-Ω-expressions, un sous-ensemble N qui a presque une structure de treillis. L'ordre, dont nous avons muni N, suivant l'approche de Nivat [14], est purement syntaxique. Cet ordre est analogue à celui considéré, pour le cas des programmes récursifs, par Courcelle-Kahn, Vuillemin [5], Courcelle-Vuillemin [6]. L'ensemble N va nous permettre de définir le "degré d'information" que contient une λ-Ω-expression. Pour ce faire, nous parlerons donc d'approximants d'une λ-Ω-expression, en adoptant la même définition que Wadsworth [21].

1.3. Treillis des approximants d'une expression

1.3.1. Définition : nous appellerons ensemble des approximants d'une λ-Ω-expression ε, l'ensemble des approximations directes des expressions dérivables par β-réduction de ε. Nous noterons $A(\varepsilon)$ cet ensemble. Autrement dit :

$$A(\varepsilon) = \{\phi\eta \mid \varepsilon \overset{*}{\rightarrow} \eta\}$$

Un élément de $A(\varepsilon)$ est un approximant de ε. Et, comme $\phi : \Lambda \rightarrow N$, nous savons que, pour toute λ-Ω- expression ε, $A(\varepsilon) \subset N$.

Notation : nous noterons $\mathcal{D}(\varepsilon)$, l'ensemble des expressions dérivables par β-réduction de ε :

$$\boxed{\mathcal{D}(\varepsilon) = \{\eta \mid \varepsilon \overset{*}{\rightarrow} \eta\}}$$

Nous avons donc la relation suivante :

$$\boxed{A(\varepsilon) = \phi(\mathcal{D}(\varepsilon))}$$

1.3.2. Proposition :

$$\varepsilon \overset{*}{\rightarrow} \varepsilon' \implies \phi\varepsilon < \phi\varepsilon'$$

Autrement dit, on ne peut qu'augmenter l'information par β-réduction.

Démonstration : immédiate par une récurrence sur la longueur de $\phi\varepsilon$.

Cas de base : $\phi\varepsilon = \Omega$. Alors, pour tout ε', on a : $\phi\varepsilon < \phi\varepsilon'$. En particulier pour ε' tel que $\varepsilon \overset{*}{\to} \varepsilon'$.

Cas général : $\phi\varepsilon = \lambda x_1 x_2 \ldots x_m . x a_1 a_2 \ldots a_n$. D'après la proposition 1.1.2.3. :

$$\varepsilon = \lambda x_1 x_2 \ldots x_m . x \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n \qquad (x \neq \Omega)$$

et $\phi\varepsilon_i = a_i$ pour $1 \leq i \leq n$.

Si $\varepsilon \overset{*}{\to} \varepsilon'$, ceci signifie :

$$\varepsilon' = \lambda x_1 x_2 \ldots x_m . x \varepsilon'_1 \varepsilon'_2 \ldots \varepsilon'_n$$

et $\varepsilon_i \overset{*}{\to} \varepsilon'_i$ pour $1 \leq i \leq n$, les conversions de ε à ε' ne pouvant être qu'internes aux ε_i. Or la longueur de $\phi\varepsilon_i$ est plus petite que celle de $\phi\varepsilon$, et par hypothèse de récurrence, nous avons $\phi\varepsilon_i < \phi\varepsilon'_i$. Par définition de l'ordre sur $\mathcal{N}$,

$$\phi\varepsilon < \lambda x_1 x_2 \ldots x_m . x(\phi\varepsilon'_1)(\phi\varepsilon'_2)\ldots(\phi\varepsilon'_n)$$

et comme $x \neq \Omega$, d'après 1.1.2.1.

$$\phi\varepsilon' = \lambda x_1 x_2 \ldots x_m . x(\phi\varepsilon'_1)(\phi\varepsilon'_2)\ldots(\phi\varepsilon'_n)$$

d'où : $\phi\varepsilon < \phi\varepsilon'$. □

1.3.3. Proposition : Les deux clauses suivantes sont équivalentes pour toute expression :

(a) $\mathcal{A}(\varepsilon) = \{\Omega\}$

(b) ε n'a pas de f.n.g. ou ε a une f.n.g. de variable de tête Ω.

Démonstration : (a) => (b). Si $\mathcal{A}(\varepsilon) = \{\Omega\}$, pour toute expression η dérivable de ε par β-réduction, on a $\phi\eta = \Omega$. D'après la proposition 1.1.2.2., η n'est pas en f.n.g. ou η est une f.n.g. de variable de tête Ω. Donc toute expression η, dérivable de ε, a l'une de ces deux formes. Donc ε n'a pas de f.n.g. ou ε a une f.n.g. de variable de tête Ω.

(b) => (a). Remarquons que les deux alternatives de (b) s'excluent mutuellement, une expression ne pouvant à la fois ne pas avoir de f.n.g. et avoir une f.n.g. Si ε n'a pas de f.n.g., pour tout η dérivable de ε, η n'est pas en f.n.g. et d'après 1.1.2.2., $\phi\eta = \Omega$. Donc $A(\varepsilon) = \{\Omega\}$. Si ε a une f.n.g., t, de variable de tête Ω, c'est-à-dire ;

$$t = \lambda x_1 x_2 \ldots x_m . \Omega \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n$$

Soit η dérivable par β-réduction de ε. Si η n'est pas en f.n.g., $\phi\eta = \Omega$ (d'après 1.1.2.2.). Si η est en f.n.g., $\eta \simeq t$ (d'après I.1.3.3.) et donc η s'écrit sous la forme :

$$\eta = \lambda x_1 x_2 \ldots x_m . \Omega \eta_1 \eta_2 \ldots \eta_n$$

η a donc Ω comme variable de tête et $\phi\eta = \Omega$ (voir 1.1.2.2.). Toute expression η, dérivable de ε, est donc telle que $\phi\eta = \Omega$. Autrement dit : $A(\varepsilon) = \{\Omega\}$. □

1.3.4. <u>Proposition</u> : Soit ε une expression. Si $A(\varepsilon)$, ensemble des approximants de ε, contient des éléments différents de Ω, alors il existe un plus petit élément différent de Ω dans $A(\varepsilon)$.

<u>Démonstration</u> : Si $a \in A(\varepsilon)$ et $a \neq \Omega$, d'après la proposition 1.1.2.3., on sait que $a = \phi(\eta)$, pour une expression η en f.n.g..Comme $a \in A(\varepsilon)$, $\eta \in \mathcal{D}(\varepsilon)$ et, par la proposition I.1.3.5., il existe une f.n.g. t_g, dérivable de ε, telle que :

$$t_g \overset{*}{\to} \eta$$

Par 1.3.5., nous avons : $\phi(t_g) < \phi\eta$. Et comme $t_g \in \mathcal{D}(\varepsilon), \phi(tg) \in A(\varepsilon)$. □

1.3.5. <u>Proposition</u> : Si ε a une f.n.g. t, de variable de tête différente de Ω, soit :

$$t = \lambda x_1 x_2 \ldots x_m . x \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n \qquad (x \neq \Omega)$$

Soit a_i un approximant de ε_i $(1 \le i \le n)$, alors $\lambda x_1 x_2 \ldots x_m . x a_1 a_2 \ldots a_n$ est un approximant de ε.

<u>Démonstration</u> : Immédiate. On a : $\varepsilon \overset{*}{\to} t$ et :

$$t = \lambda x_1 x_2 \ldots x_m . x \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n$$

Si $a_i \in A(\varepsilon_i)$, il existe donc, par la définition de la notion d'approximant, une expression η_i telle que :

$a_i = \phi\eta_i$ et $\varepsilon_i \overset{*}{\to} \eta_i$. On a donc :

$$t \overset{*}{\to} \lambda x_1 x_2 \ldots x_m . x \eta_1 \eta_2 \ldots \eta_n$$

et, si on appelle u cette dernière expression :

$$\varepsilon \overset{*}{\to} t \overset{*}{\to} u = \lambda x_1 x_2 \ldots x_m . x \eta_1 \eta_2 \ldots \eta_n$$

Donc $u \in \mathcal{D}(\varepsilon)$ et, par 1.1.2.1., comme $x \neq \Omega$:

$$\phi u = \lambda x_1 x_2 \ldots x_m . x (\phi\eta_1)(\phi\eta_2) \ldots (\phi\eta_n)$$

$$= \lambda x_1 x_2 \ldots x_m . x a_1 a_2 \ldots a_n$$

puisque $a_i = \phi\eta_i$. Comme $\phi u \in A(\varepsilon)$, on a donc :

$$\lambda x_1 x_2 \ldots x_m . x a_1 a_2 \ldots a_n \in A(\varepsilon). \quad \square$$

1.3.6. <u>Proposition</u> : Pour toute expression ε et pour toute paire d'expressions η et η', dérivables de ε, il existe une expression ζ, dérivable de ε, telle que :

$$\phi(\zeta) = \mathrm{Min}(\phi(\eta), \phi(\eta'))$$

et telle que : $\zeta \overset{*}{\to} \eta$ et $\zeta \overset{*}{\to} \eta'$.

<u>Démonstration</u> : Utilisons une récurrence sur la longueur de $\mathrm{Min}(\phi\eta, \phi\eta')$.

<u>Cas de base</u> : $\mathrm{Min}(\phi\eta, \phi\eta') = \Omega$. Trois cas se présentent, d'après la définition de Min (voir 1.2.4.2.)

1) $\phi\eta = \Omega$. Comme $\eta \in \mathcal{D}(\varepsilon)$, on a $\varepsilon \overset{*}{\to} \eta$ et donc $\phi\varepsilon < \phi\eta$ (d'après 1.3.2.). Donc $\phi\varepsilon < \Omega$, car $\phi\eta = \Omega$ et Ω étant l'élément minimum de N, $\phi\varepsilon = \Omega$. Or $\eta' \in \mathcal{D}(\varepsilon)$, c'est-à-dire : $\varepsilon \overset{*}{\to} \eta'$. Nous avonc donc : $\varepsilon \overset{*}{\to} \eta$ et $\varepsilon \overset{*}{\to} \eta'$ et $\phi\varepsilon = \Omega = \mathrm{Min}(\phi\eta, \phi\eta')$. Et ε joue le rôle du ζ recherché, dans ce cas.

2) $\phi\eta' = \Omega$. Cas symétrique au précédent et nous avons donc la même démonstration.

3) $\phi\eta \neq \phi\eta'$. Nous supposons $\phi\eta$ et $\phi\eta'$ tous les deux distincts de Ω pour exclure les deux cas précédents. D'après I.1.2.3., η et η' sont deux f.n.g. de variable de tête différente de Ω. Comme η et η' sont dérivables de ε, par I.1.3.3., nous avons $\eta \simeq \eta'$ et, par application immédiate de I.1.2.1., $\phi\eta \simeq \phi\eta'$. Ce cas est donc impossible.

<u>Cas général</u> : $\mathrm{Min}(\phi\eta,\phi\eta') = \lambda x_1 x_2 \ldots x_p . x m_1 m_2 \ldots m_q$. D'après la définition de Min (voir 1.2.4.2.) :

$$\phi\eta = \lambda x_1 x_2 \ldots x_p . x a_1 a_2 \ldots a_q \qquad (x \neq \Omega)$$
$$\phi\eta' = \lambda x_1 x_2 \ldots x_p . x b_1 b_2 \ldots b_q$$

et : $\qquad m_i = \mathrm{Min}(a_i,b_i)$ pour $1 \leq i \leq q$

Nous avons donc, par application de I.1.2.3., η et η' de la forme :

$$\eta = \lambda x_1 x_2 \ldots x_p . x \eta_1 \eta_2 \ldots \eta_q \qquad (x \neq \Omega)$$
$$\eta' = \lambda x_1 x_2 \ldots x_p . x \eta'_1 \eta'_2 \ldots \eta'_q$$

et $\qquad a_i = \phi\eta_i$, $b_i = \phi\eta'_i$ pour $1 \leq i \leq q$. De plus, par hypothèse, η et η' sont deux expressions de $\mathcal{D}(\varepsilon)$, c'est-à-dire : $\varepsilon \overset{*}{\to} \eta$ et $\varepsilon \overset{*}{\to} \eta'$. D'après I.2.4. , comme η et η' sont deux f.n.g. dérivables d'une même expression ε, nous connaissons l'existence d'une f.n.g. "minimale", t_g, dérivable elle aussi de ε, telle que : $\varepsilon \overset{*}{\to} t_g$, $t_g \overset{*}{\to} \eta$ et $t_g \overset{*}{\to} \eta'$. Par I.2.3. , nous avons également : $t_g \simeq \eta \simeq \eta'$. t_g est donc de la forme :

$$t_g = \lambda x_1 x_2 \ldots x_p . x \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_q$$

De plus $\varepsilon_i \overset{*}{\to} \eta_i$ et $\varepsilon_i \overset{*}{\to} \eta'_i$ pour $1 \leq i \leq q$. Donc, η_i et η'_i sont deux expressions dérivables de ε_i et $m_i = \mathrm{Min}(a_i,b_i) = \mathrm{Min}(\phi\eta_i,\phi\eta'_i)$ a une longueur plus petite que celle de $\mathrm{Min}(\phi\eta,\phi\eta')$. Par hypothèse de récurrence, il existe ζ_i dans $\mathcal{D}(\varepsilon_i)$ tel que :

$$\phi\zeta_i = \mathrm{Min}(\phi\eta_i,\phi\eta'_i) = m_i \text{ pour } 1 \leq i \leq q.$$

et $\qquad \zeta_i \overset{*}{\to} \eta_i$, $\zeta_i \overset{*}{\to} \eta'_i$ pour tout i.

Appelons ζ l'expression :

$$\zeta = \lambda x_1 x_2 \ldots x_p . x\zeta_1 \zeta_2 \ldots \zeta_q$$

Comme $\varepsilon_i \overset{*}{\to} \zeta_i$ pour tout i, $1 \leq i \leq q$, $t_g \overset{*}{\to} \zeta$. Et comme $\varepsilon \overset{*}{\to} t_g, \varepsilon \overset{*}{\to} \zeta . \zeta$ est donc un membre de $\mathcal{D}(\varepsilon)$ et, puisque $x \neq \Omega$:

$$\begin{aligned} \phi\zeta &= \lambda x_1 x_2 \ldots x_p . x(\phi\zeta_1)(\phi\zeta_2)\ldots(\phi\zeta_q) \text{ par } 1.1.2.1. \\ &= \lambda x_1 x_2 \ldots x_p . x m_1 m_2 \ldots m_q \\ &= \mathrm{Min}(\phi\eta, \phi\eta'). \end{aligned}$$

De plus, comme $\zeta_i \overset{*}{\to} \eta_i$ et $\zeta_i \overset{*}{\to} \eta_i'$, on a $\zeta \overset{*}{\to} \eta$ et $\zeta \overset{*}{\to} \eta'$. □

Corollaire :

Si a et b sont deux approximants d'une expression ε, Min(a,b) est aussi un approximant de ε. Autrement dit :

$$a,b \in A(\varepsilon) \Rightarrow \mathrm{Min}(a,b) \in A(\varepsilon).$$

Démonstration : Par définition de $A(\varepsilon)$, $A(\varepsilon) = \phi(\mathcal{D}(\varepsilon))$. Si a, b $\in A(\varepsilon)$, il existe η et η' dans $\mathcal{D}(\varepsilon)$ tels que : $\phi\eta = a$ et $\phi\eta' = b$. D'après la proposition précédente, il existe ζ dans $\mathcal{D}(\varepsilon)$ tel que $\phi\zeta = \mathrm{Min}(\phi\eta, \phi\eta') = \mathrm{Min}(a,b)$. Par définition de $A(\varepsilon)$, $\phi\zeta \in A(\varepsilon)$ et donc Min(a,b) $\in A(\varepsilon)$. □

1.3.7. Proposition : $A(\varepsilon)$ est un sous-ensemble dirigé de N, c'est-à-dire, pour tout couple a,b d'éléments de $A(\varepsilon)$, il existe un c dans $A(\varepsilon)$ tel que :

$$a < c \quad \text{et } b < c.$$

Démonstration : Si a,b $\in A(\varepsilon)$, par définition de $A(\varepsilon)$, il existe η et η' dérivables de ε, tels que $a = \phi\eta$ et $b = \phi\eta'$. Par application du théorème de Church-Rosser, comme $\varepsilon \overset{*}{\to} \eta$ et $\varepsilon \overset{*}{\to} \eta'$, il existe ζ tel que : $\eta \overset{*}{\to} \zeta$ et $\eta' \overset{*}{\to} \zeta$. Par 1.3.2., on a donc : $\phi\eta < \phi\zeta$ et $\phi\eta' < \phi\zeta$. Posons $c = \phi\zeta$. On a : $a < c$ et $b < c$. D'autre part, $\varepsilon \overset{*}{\to} \eta \overset{*}{\to} \zeta$. Donc $\zeta \in \mathcal{D}(\varepsilon)$, c'est-à-dire $c = \phi\zeta \in A(\varepsilon)$. □

1.3.8. Proposition : Max est une fonction totale de $A(\varepsilon) \times A(\varepsilon)$ dans N.

<u>Démonstration</u> : Si $a,b \in A(\varepsilon)$, par application de la proposition précédente, il existe c dans $A(\varepsilon)$ tel que : $a < c$ et $b < c$. a et b admettent donc un majorant commun c dans $A(\varepsilon)$, donc dans N. Max(a,b) est alors défini, comme l'assure la partie (a) de la preuve de 1.2.4.3. □

1.3.9. <u>Proposition</u> : Si a et b sont deux approximants d'une expression ε, Max(a,b) est aussi un approximant de ε, c'est-à-dire :

$$a,b \in A(\varepsilon) \Rightarrow \mathrm{Max}(a,b) \in A(\varepsilon)$$

<u>Démonstration</u> : Par récurrence sur la longueur de Max(a,b).

<u>Cas de base</u> : $\mathrm{Max}(a,b) = \Omega$. Par définition de Max (voir 1.2.4.3.), $a = b = \Omega$. Et donc $a = b = \mathrm{Max}(a,b) = \Omega$. Comme $a,b \in A(\varepsilon)$, $\mathrm{Max}(a,b) \in A(\varepsilon)$.

<u>Cas général</u> : $\mathrm{Max}(a,b) = \lambda x_1 x_2 \ldots x_p . x m_1 m_2 \ldots m_q$. Trois cas se présentent :

1) $b = \Omega$. Par définition de Max, on a alors : $a = \mathrm{Max}(a,b)$. Et donc, comme $a \in A(\varepsilon)$, $\mathrm{Max}(a,b) \in A(\varepsilon)$.

2) $a = \Omega$. Cas symétrique du précédent.

3) a et b tous les deux distincts de Ω et alors :

$$a = \lambda x_1 x_2 \ldots x_p . x a_1 a_2 \ldots a_q$$
$$b = \lambda x_1 x_2 \ldots x_p . x b_1 b_2 \ldots b_q$$

et : $m_i = \mathrm{Max}(a_i, b_i)$ pour $1 \leq i \leq q$. D'après la proposition I.2.4, ε a alors une f.n.g. minimale t_g, $t_g = \lambda x_1 x_2 \ldots x_p . x \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_q$, et $a_i, b_i \in A(\varepsilon_i)$ pour $1 \leq i \leq q$. D'autre part, la longueur de m_i est plus petite que celle Max(a,b), donc par hypothèse de récurrence, $m_i = \mathrm{Max}(a_i, b_i) \in A(\varepsilon_i)$ et par 1.3.5. :

$$\lambda x_1 x_2 \ldots x_p . x m_1 m_2 \ldots m_q \in A(\varepsilon)$$

ou encore $\mathrm{Max}(a,b) \in A(\varepsilon)$. □

1.3.10 : <u>Proposition</u> : Pour toute expression ε, $A(\varepsilon)$, ensemble de ces approximants, est un sous-treillis de N, ensemble des expressions en ω-β-forme normale.

Plus précisement :

1) $A(\varepsilon)$ contient un élément minimum, $\phi\varepsilon$.

2) toute paire d'éléments a,b de $A(\varepsilon)$ admet un plus grand commun minorant, Min(a,b)

3) toute paire d'éléments a,b de $A(\varepsilon)$ admet un plus petit commun majorant Max(a,b).

Démonstration : 1) Elément minimum. Soit a un élément de $A(\varepsilon)$, il existe donc un η dans $\mathcal{D}(\varepsilon)$ tel que $a = \phi\eta$. Or $\varepsilon \overset{*}{\to} \eta$ et, donc, $\phi\varepsilon < \phi\eta$ par 1.3.2. Comme $\varepsilon \in \mathcal{D}(\varepsilon)$, $\phi\varepsilon \in A(\varepsilon)$ et $\phi\varepsilon$ est donc bien l'élément minimum de $A(\varepsilon)$.

2) Plus grand commun minorant. Soient a,b deux éléments de $A(\varepsilon)$. Nous savons (voir 1.3.6.) que Min(a,b) $\in A(\varepsilon)$. Comme $A(\varepsilon)$ est un sous-ensemble de N, Min(a,b) est bien le plus grand commun minorant de a et b dans $A(\varepsilon)$.

3) Plus petit commun majorant. Soient a,b deux éléments de $A(\varepsilon)$. Max(a,b) $\in A(\varepsilon)$ (voir 1.3.9.) et comme $A(\varepsilon)$ est un sous-ensemble de N, Max(a,b) est bien le plus petit commun majorant de a et b dans $A(\varepsilon)$. □

1.3.11. Proposition : Les trois clauses suivantes sont équivalentes, pour toute paire d'éléments a,b de $A(\varepsilon)$:

(a) $a < b$

(b) Pour tout η' tel que $\phi\eta' = b$, il existe η tel que $\phi\eta = a$ et $\eta \overset{*}{\to} \eta'$, η et η' étant des expressions dérivables de ε.

(c) Il existe η et η', dérivables de ε, tels que : $\eta \overset{*}{\to} \eta'$ et $\phi\eta = a, \phi\eta = b$.

Démonstration : (a) ⇒ (b). Soient a,b quelconques dans $A(\varepsilon)$ tels que $a < b$. Considérons ε', η', quelconques, respectivement dans $\phi^{-1}(a)$ et $\phi^{-1}(b)$. Nous avons ε', η' dans $\mathcal{D}(\varepsilon)$ et, d'après 1.3.6., il existe η dans $\mathcal{D}(\varepsilon)$, tel que :

$$\phi\eta = \mathrm{Min}(\phi\varepsilon', \phi\eta') = \mathrm{Min}(a,b) = a$$

(b) => (c). Soient a,b dans $A(\varepsilon)$, $\phi^{-1}(a)$ et $\phi^{-1}(b)$ ne sont pas des ensembles vides. Si, donc, pour tout η' tel que $\phi\eta' = b$, il existe η tel que $\phi\eta = a$, il existe bien η et η' dans $\mathcal{D}(\varepsilon)$ tels que $\phi\eta = a$, $\phi\eta' = b$ et $\eta \overset{*}{\rightarrow} \eta'$.

(c) => (a). Soient a,b dans $A(\varepsilon)$, et soient η et η' dans $\mathcal{D}(\varepsilon)$, tels que $\eta \overset{*}{\rightarrow} \eta'$ et $\phi\eta = a$, $\phi\eta' = b$. D'après 1.3.2., $\phi\varepsilon < \phi\varepsilon'$. Donc $a < b$. $\square$

Remarquons que si $a,b \in A(\varepsilon)$ et si $a < b$, il n'est pas vrai que pour tout η de $\mathcal{D}(\varepsilon)$, tel que $\phi\eta = a$, il existe un η' de $\mathcal{D}(\varepsilon)$ tel que $\phi\eta' = b$ et $\eta \overset{*}{\rightarrow} \eta'$. En effet, considérons $\varepsilon = (Ix)(Ix)$ où $I = \lambda y.y$. Nous avons

$\mathcal{D}(\varepsilon)$:

$$\begin{tikzcd}
 & (Ix)(Ix) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
x(Ix) \arrow[dr] & & (Ix)x \arrow[dl] \\
 & xx &
\end{tikzcd}$$

et $A(\varepsilon)$:

$$\begin{tikzcd}
\Omega \arrow[d, "<"] \\
x\,\Omega \arrow[d, "<"] \\
xx
\end{tikzcd}$$

c'est-à-dire : $\mathcal{D}(\varepsilon) = \{(Ix)(Ix), x(Ix), (Ix)x, xx\}$ et $A(\varepsilon) = \{\Omega, x\Omega, xx\}$.

Et :

$$\phi((Ix)(Ix)) = \phi((Ix)x) = \Omega$$

$$\phi(x(Ix)) = x\,\Omega$$

$$\phi(xx) = xx$$

Pourtant : $\Omega < x\,\Omega$ et si $\eta = (Ix)x$, $\phi\eta = \Omega$ et il n'existe pas η', tel que $\eta' \in \mathcal{D}(\varepsilon)$ et $\eta \overset{*}{\rightarrow} \eta'$ et $\phi\eta' = x\Omega$. De même, sur cet exemple, on voit que la proposition duale de 1.3.6., pour Max, est fausse.

<u>Corollaire</u> : Pour toute chaine finie croissante $\{a_1, a_2, \ldots a_n\}$ de $A(\varepsilon)$, il existe une réduction :

$$\varepsilon_1 \overset{*}{\rightarrow} \varepsilon_2 \overset{*}{\rightarrow} \ldots \overset{*}{\rightarrow} \varepsilon_n$$

telle que $\phi\varepsilon_i = a_i$ pour $1 \le i \le n$ et $\varepsilon_i \in \mathcal{D}(\varepsilon)$.

Démonstration : Application immédiate de la proposition précédente. □

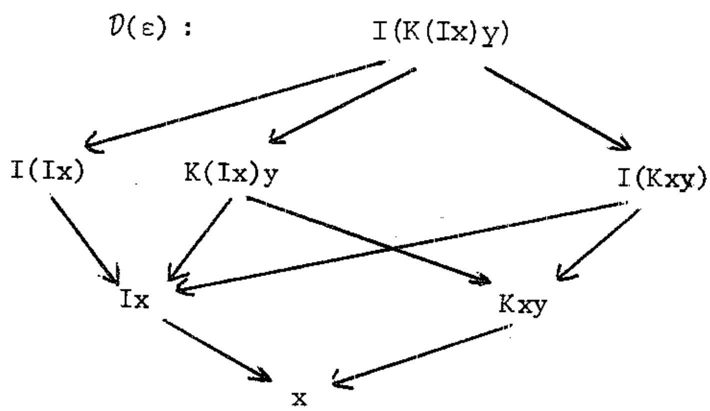
1.3.12. Conclusion et discussion.

L'ensemble des approximants de toute λ-Ω-expression a une structure de treillis, vis à vis de l'ordre $<$ de N. Mais $\mathcal{D}(\varepsilon)$, ensemble des expressions dérivables de ε, n'a pas cette belle structure. En effet, nous pourrions nous définir le préordre suivant :

si $\eta, \eta' \in \mathcal{D}(\varepsilon)$, $\eta < \eta' \iff \eta \overset{*}{\to} \eta'$

Nous n'avons pas bien sûr l'antisymétrie, car nous pouvons avoir à la fois : $\eta \overset{*}{\to} \eta'$ et $\eta' \overset{*}{\to} \eta$. Par exemple : $\eta = I((\lambda x.I(xx))(\lambda x.I(xx)))$ et $\eta' = (\lambda x.I(xx))(\lambda x.I(xx))$ si $I = \lambda x.x$. En prenant l'espace quotient de $\mathcal{D}(\varepsilon)$ relativement à ce préordre, nous n'avons toujours pas une structure de treillis. En effet, prenons $\varepsilon = I(K(Ix)y)$, si $I = \lambda x.x$ et $K = \lambda x.\lambda y.y$; nous avons alors :

$\mathcal{D}(\varepsilon)$:



et, Ix et Kxy n'ont pas de plus grand minorant commun, vis à vis de l'ordre considéré, puisque K(Ix)y et I(Kxy) sont des minorants de Ix et Kxy, mais ne sont pas inférieurs à un plus grand minorant commun.

Remarquons, également, que si ε a une forme normale n, $A(\varepsilon)$ a un élément maximum n. Si ce n'est pas le cas, $A(\varepsilon)$ peut toujours avoir un élément maximum. Prenons, par exemple, $\varepsilon = (Ix)(\Delta\Delta)$ où $I = \lambda y.y$ et $\Delta = \lambda z.zz$. $A(\varepsilon)$ a alors un élément maximum $x\Omega$. Mais, en général, $A(\varepsilon)$ n'aura pas d'élément maximum. Considérons, par exemple, $\varepsilon = Y$ où Y est l'opérateur point fixe, voir Morris [12] c'est-à-dire $Y = \lambda f.(\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx))$. Dans ce cas, $A(Y) = \{\Omega, \lambda f.f\Omega, \lambda f.f(f\Omega), \lambda f.f(f(f\Omega)),\ldots\}$ et $A(Y)$ n'a pas d'élément maximum.

Nous aimerions pouvoir parler de la "valeur" de ε, comme étant l'approximation maximale que nous pouvons avoir de ε. Autrement dit, la "valeur" de ε serait l'élément maximum de $A(\varepsilon)$. Or ce point n'existe pas, comme nous venons de le voir. Nous allons donc introduire des points infinis, c'est-à-dire compléter N par des points infinis. Cet ensemble complété sera noté $\hat{N}$ et nous pourrons, après, parler de "valeur" de toute expression en introduisant une fonction sémantique de Λ dans $\hat{N}$ qui précisera cette idée intuitive que nous venons de développer.

2) $\hat{N}$: ensemble des points d'information finie ou infinie

2.1. Ensembles dirigés :

Un *ensemble dirigé* S sur un treillis D, muni de l'ordre <, est un sous-ensemble de D, tel que pour toute paire x,y d'éléments de S, il existe dans S un élément z tel que : $x < z$ et $y < z$.

Scott [17] utilise abondamment cette notion, quoique sa définition est légèrement différente. Remarquons que toute chaine croissante est un ensemble dirigé. Nous parlerons d'ensembles dirigés, plutôt que de chaines, car cette notion est plus facile à manipuler et évite de parler d'indices, mais nous sommes bien conscients que ces deux notions sont équivalentes. Nous avons déjà vu, au paragraphe précédent, que pour toute expression ε, $A(\varepsilon)$ est un sous-ensemble dirigé de N.

2.2. Définition de $\bar{N}$:

$\bar{N}$ est l'ensemble de tous les sous-ensembles dirigés de N. autrement dit :

$$\boxed{\bar{N} = \{ S \mid S \subset N , S \text{ dirigé} \}}$$

2.3. Ordre sur $\bar{N}$ et définition de $\hat{N}$

Pour toute paire d'éléments S,S' de $\bar{N}$, nous dirons que S' domine S ou $S \subseteq S'$ ssi , pour tout a de S, il existe un b de S' tel que $a < b$.
En bref :

$$S \subseteq S' \iff \forall a \in S \,.\, \exists b \in S' \,.\, a < b$$

La relation $\subseteq$ est réflexive et transitive, mais elle *n'est pas antisymétrique*. Par exemple, pour $S = \{ f^n \Omega \mid n \geq 0 \}$ et $S' = \{ f^{2n} \Omega \mid n \geq 0 \}$, $S \subseteq S'$ et $S' \subseteq S$. Nous allons, donc, passer à un *espace quotient* $\bar{N}/\equiv$, en considérant la relation d'équivalence, $\equiv$, définie par :

$$S \equiv S' \iff S \subseteq S' \text{ et } S' \subseteq S$$

pour S,S' dans $\bar{N}$. Par [S] , nous désignerons la classe d'équivalence de S, c'est à dire :

$$[S] = \{ S' \mid S \equiv S' , S' \in \bar{N} \}$$

pour tout S de $\bar{N}$. L'ensemble $\bar{N}/\equiv$ est, donc, munie de l'ordre suivant :

$$[S] \subseteq [S'] \iff S \subseteq S'$$

pour tout S,S' de N. Remarquons que si $[S] \subseteq [S']$, alors pour tout U, U' dans [S] et [S'] , on a : $U \subseteq U'$.

Définition : Posons : $\boxed{\hat{N} = \bar{N}/\equiv}$

2.4. Structure de $\hat{N}$

2.4.1. Lemme : $\hat{N}$ a un élément minimum, $[\{\Omega\}]$.

Démonstration : Pour tout S de $\bar{N}$, $\{\Omega\} \subseteq S$, donc $[\{\Omega\}] \subseteq [S]$.□

2.4.2. Lemme : Toute paire [S] et [S'] d'éléments de $\hat{N}$ a un plus grand minorant commun, noté $[S] \sqcap [S']$, tel que :

$$[S] \sqcap [S'] = [\{ \mathrm{Min}\ (a,a') \mid a \in S, a' \in S' \}]$$

Démonstration : Immédiate. En effet, posons :

$$M = \{ \mathrm{Min}\ (a,a') \mid a \in S, a' \in S' \}$$

Nous avons :

1) $M \in \bar{N}$. En effet, d'abord $M \subset N$ car Min est une fonction totale sur $N \times N$ et à valeurs dans N. De plus M est dirigé. Considérons m et m' dans M. Par définition de M, il existe a,b dans S et a',b' dans S' tels que :

$$m = \mathrm{Min}\ (a,a') \quad \text{et} \quad m' = \mathrm{Min}\ (b,b')$$

Comme S et S' sont dirigés, il existe c dans S et c' dans S' tels que :

$$a < c\ ,\ b < c \quad \text{et} \quad a' < c'\ ,\ b' < c'. \quad \text{Donc :}$$

$$\mathrm{Min}\ (a,a') < \mathrm{Min}\ (c,c') \quad \text{et} \quad \mathrm{Min}\ (b,b') < \mathrm{Min}\ (c,c').$$

De plus, par définition de M, Min (c,c') est dans M.

2) $[M] \subseteq [S]$. On a bien $M \subseteq S$, car pour tout m de M, il existe a et a' dans S et S', tels que $m = \mathrm{Min}\ (a,a')$, donc tels que $m < a$.

3) $[M] \subseteq [S']$ pour la même raison.

4) Si $[T] \subseteq [S]$ et $[T] \subseteq [S']$, alors $[T] \subseteq [M]$ pour tout T de $\bar{N}$. Supposons, donc, $T \subseteq S$ et $T \subseteq S'$. Si a est un élément quelconque de T, il existe donc b et b' dans S et S' tels que $a < b$ et $a < b'$. D'où $a < \mathrm{Min}\ (b,b')$. Or $\mathrm{Min}\ (b,b')$ est un élément de M. Donc pour tout a de T, il existe un élément de M, supérieur. Ce qui signifie : $T \subseteq M$ et donc $[T] \subseteq [M]$. □

2.4.3. Lemme : Toute paire $[S]$ et $[S']$ d'éléments de $\hat{N}$, qui a un majorant commun, a un plus petit commun majorant, noté $[S] \sqcup [S']$, tel que :

$$[S] \sqcup [S'] = [\{ \mathrm{Max}\ (a,a') \mid a \in S, a' \in S' \}]$$

Démonstration : Posons $M = \{ \mathrm{Max}\ (a,a') \mid a \in S, a' \in S' \}$. Nous avons :

1) M bien défini. En effet, soit $[T]$ le majorant commun de $[S]$ et $[S']$. Donc $S \subseteq T$ et $S' \subseteq T$. Et tout élément a de S admet un majorant b dans T ; de même tout élément a' de S' admet un majorant b' dans T. Comme T est dirigé, b et b' sont majorés par un c de T. Et donc toute paire d'éléments a,a' de S et S' admet un majorant c dans T, donc dans N. $\mathrm{Max}\ (a,a')$ est alors bien défini (voir paragraphe précédent 1.2.4).

2) $M \in \bar{N}$. Nous avons, bien, $M \subset N$. Montrons que M est dirigé. Soient m et m' dans M. Il existe a,b dans S et a',b' dans S' tels que : $m = \mathrm{Max}\ (a,a')$ et $m' = \mathrm{Max}\ (b,b')$. Or S et S' sont dirigés, il existe donc c et c' dans S et S' tels que : $a < c$, $b < c$ et $a' < c'$, $b' < c'$. Donc :

$\mathrm{Max}\ (a,a') < \mathrm{Max}\ (c,c')$ et $\mathrm{Max}\ (b,b') < \mathrm{Max}\ (c,c')$.

Or, comme c et c' sont dans S et S', Max (c,c') est dans M. Pour toute paire d'éléments m et m' de M, il existe donc un majorant commun dans M et M est dirigé.

3) $[S] \subseteq [M]$, c'est à dire $S \subseteq M$. Pour tout a de S, prenons a' arbitraire dans S' ; Max (a,a') est dans M et a < Max (a,a').

4) $[S] \subseteq [M']$ pour la même raison.

5) Si $[S] \subset [U]$ et $[S'] \subseteq [U]$, alors $[M] \subseteq [U]$, pour tout U de $\hat{N}$. Supposons, donc, $S \subseteq U$ et $S' \subseteq U$. Si m est un élément quelconque de M, il existe a et a' dans S et S', tes que m = Max (a,a'). Or, comme $S \subseteq U$, pour cet élément a de S, il existe b dans U tel que a < b. De même, comme $S' \subseteq U$, il existe b' dans U tel que a' < b'. Comme U est dirigé, b et b' ont un majorant commun c dans U, c'est à dire : b < c et b' < c. Donc a < c et a' < c, pour un élément c de U. D'où Max (a,a') < c, comme Max (a,a') est le plus petit majorant de a et a'. En bref, pour tout m de M, nous avons trouvé un c dans U tel que : m < c. Donc $M \subseteq U$ et $[M] \subseteq [U]$. □

2.4.4. <u>Proposition</u> : $\hat{N}$ a une structure d'inf-treillis, ou plus exactement :

1) il existe un élément minimum
2) toute paire d'éléments a un plus grand commun minorant.
3) toute paire d'éléments, ayant un majorant commun, a un plus petit commun majorant.

<u>Démonstration</u> : Corollaire des lemm es 2.4.1., 2.4.2., 2.4.3. □

Pour l'instant, nous n'avons rien gagné au point de vue structure, les structures de N et de $\bar{N}$, plus exactement de son espace quotient $\hat{N}$ sont identiques. Ce sont, tous les deux, des inf-treillis qui possèdent en plus une propriété de treillis pour les points qui ont des majorants communs. L'ensemble $\bar{N}$ est plus vaste, car il a la même cardinalité que les réels et l'ensemble N est dénombrable. Grâce à $\bar{N}$, nous pouvons parler, à présent, de points "infinis". Par exemple, $\{ \Omega, f\Omega, f(f\Omega), \ldots, f^n\Omega, \ldots \}$ est un point de $\bar{N}$. Mais $\hat{N}$ a une structure plus riche que N.

2.4.5. Proposition : $\hat{N}$ est complet, c'est à dire tout sous-ensemble dirigé de $\hat{N}$ admet une limite dans $\hat{N}$.

Démonstration : Soit X un sous-ensemble dirigé de $\hat{N}$. Posons :

$E = \bigcup_{[S] \in X} S$. E est donc l'union de tous les sous-ensembles dirigés, S, de N tels que [S] est dans X.

1) E est un sous-ensemble dirigé de N. En effet, prenons a et b quelconques dans E. Si a et b sont dans un même sous-ensemble S de N, comme S est dirigé, il existe un c dans S, donc dans E, qui majore a et b. Si a et b sont dans deux sous-ensembles S et S' distincts. Comme [S] et [S'] sont dans X, sous-ensemble dirigé de $\hat{N}$, il existe [S"] dans X, tel que : $[S] \subseteq [S"]$ et $[S'] \subseteq [S"]$. Donc $S \subseteq S"$ et $S' \subseteq S"$, c'est à dire il existe a' et b' dans S" tels que : $a < a'$ et $b < b'$. Comme S" est dirigé, il existe c dans S", donc dans E, tel que $a' < c$ et $b' < c$; donc tel que $a < c$ et $b < c$. Dans tous les cas, si a et b sont deux éléments quelconques de E, il existe c dans E tel que : $a < c$ et $b < c$ et E est donc bien un sous-ensemble dirigé de N.

2) Si $[S] \in X$, alors $[S] \subseteq [E]$.
Immédiat par définition des différents ordres. En effet, si $[S] \in X$, $S \subset E$ et, donc pour tout a dans S, il existe a dans E tel que $a < a$. Donc $S \subseteq E$ et $[S] \subseteq [E]$.

3) Si, pour tout $[S] \in X$, $[S] \subseteq [T]$, alors $[E] \subseteq [T]$ où T est un sous-ensemble dirigé de N.

Immédiat aussi. Prenons un a quelconque dans E. D'après la définition de E, a est dans un S tel que $[S] \in X$. Comme, par hypothèse, $[S] \subseteq [T]$, on a $S \subseteq T$ et il existe b dans T tel que $a < b$. Donc pour tout a de E, il existe un b plus grand dans T, c'est à dire $E \subseteq T$. Donc $[E] \subseteq [T]$. □

Au lieu de considérer cet ensemble E, égal à l'union de tous les S tels que [S] est dans X, nous aurions pu prendre un ensemble F, égal à l'union de S tel que [S] est dans X ; c'est à dire, pour chaque classe d'équivalence [S] au lieu de prendre tous les ensembles de [S] , nous n'aurions pu considérer qu'un seul S' tel que $S \equiv S'$.

Tout ensemble dirigé de $\hat{N}$ admet, donc un plus petit majorant dans $\hat{N}$. Suivant Scott [17], si X est un tel sous-ensemble dirigé, nous noterons $\sqcup X$, ce plus petit majorant, encore appelé *limite* de X. La notion de complétude de l'énoncé de la proposition précédente est différente de la notion habituelle (voir Scott [17]) car nous voulons dire complet, relativement aux sous-ensembles dirigés. Il est bien clair, que tout sous-ensemble quelconque de $\hat{N}$ n'a pas forcément de majorant. Nous devrions, peut-être, plutôt dire, suivant la terminologie de Kahn-Courcelle-Vuillemin [5] que $\hat{N}$ est un *ordre partiel complet*.

2.4.6. Topologie sur $\hat{N}$:

Suivant Scott [17] , nous allons introduire quelques légères notions topologiques, qui vont nous permettre :

1) d'éclairer nos notations,
2) de dégager dans $\hat{N}$ une famille intéressante de points, plus ou moins isomorphes à ceux de N.

2.4.6.1. Définition : Nous appelerons *ouvert* de $\hat{N}$, tout sous-ensemble O tel que :

1) si $[S] \in O$, alors tout S' tel que $[S] \subseteq [S']$ est tel que $[S'] \in O$.

2) si X est un sous-ensemble dirigé de $\hat{N}$ et si $\sqcup X \in O$, alors $X \cap O \neq \emptyset$.

De plus $\hat{N}$ et l'ensemble vide, $\emptyset$, sont des ouverts.

2.4.6.2. Définition : Nous appelerons *intérieur* de [S] , élément de $\hat{N}$, le plus grand ouvert contenu dans l'ensemble des majorants de [S] ,c'est à dire dans l'ensemble $\{ [S'] \mid [S] \sqsubseteq [S'], S' \in \bar{N} \}$

2.4.6.3. Définition : Nous dirons que [S] est *strictement inférieur* à [S'] , que nous noterons [S] < [S'], ssi [S'] est dans l'intérieur de [S].

2.4.6.4. Définition : [S] est un *point isolé* de $\hat{N}$ ssi [S] < [S].

Toutes ces notions sont dans Scott [17] . Et le lecteur est prié de s'y référer pour de plus amples développements.

2.4.7. Proposition : $\hat{N}$ est une extension de N. Plus exactement, il existe une injection de N dans $\hat{N}$, qui préserve l'ordre et la structure et f est donnée par la formule :

$$f (a) = [\{ a \}] \text{ pour tout a dans } N.$$

Démonstration :

1) f est une injection. Si f (a) = f (b), pour a et b dans N, alors $[\{ a \}] = [\{ b \}]$, c'est à dire $\{ a \} \equiv \{ b \}$. Donc : a < b et b < a. Donc : a = b.

2) f préserve l'ordre. Si a < b, $\{ a \} \sqsubseteq \{ b \}$ et donc : $[\{ a \}] \sqsubseteq [\{ b \}]$, c'est à dire $f (a) \sqsubseteq f (b)$.

3) f préserve la structure, car il est clair que :

$f (\mathrm{Min} (a,b)) = f (a) \sqcap f (b)$

et $f (\mathrm{Max} (a,b)) = f (a) \sqcup f (b)$ si Max (a,b) est défini. □

2.4.7.2. <u>Proposition</u> : Si $[\{ a \}] \subseteq [S]$, pour $[S]$ dans $\hat{N}$ et a dans N, alors $[\{ a \}] < [S]$

<u>Démonstration</u> : Nous voulons donc démontrer que les majorants de $[\{ a \}]$ forment un ouvert.

1) Si $[\{ a \}] \subseteq [S]$ et si $[S] \subseteq [S']$, on a bien :

$[\{ a \}] \subseteq [S']$ et l'axiome n°1 des ouverts est bien vérifié.

2) Si $[\{ a \}] \subseteq \sqcup X$ où X est un ensemble dirigé de $\bar{N}/\equiv$.

Nous avons vu, en 2.4.5. , que : $\sqcup X = [E]$ où E est l'ensemble dirigé tel que $E = \bigcup_{[S]\in X} S$. Nous avons donc : $\{a\} \subseteq E$ dans $\bar{N}$, c'est à dire qu'il existe b dans E tel que $a < b$ (dans N). Comme b est dans E, b est dans un S, sous-ensemble dirigé de N, tel que : $[S]\in X$. Il existe, donc, un S, tel que $[S] \in X$ et $\{a\} \subseteq S$, et, donc, $[\{ a \}] \subseteq [S]$. En bref, pour tout sous-ensemble X, dirigé, de $\hat{N}$ tel que : $[\{ a \}] \subseteq [S]$. L'ensemble des majorants de $[\{ a \}]$ vérifie bien l'axiome n°2 des ouverts. □

2.4.7.3. <u>Corollaire</u> : Pour tout a de N, $[\{ a \}]$ est un point isolé de $\hat{N}$.

<u>Démonstration</u> :Conséquence immédiate de la proposition précédente. Comme

$[\{ a \}] \subseteq [\{ a \}]$, on a $[\{ a \}] < [\{ a \}]$. □

2.4.7.4. <u>Proposition</u> : Pour tout S de $\bar{N}$, on a :

$$[S] = \sqcup \{ [\{ a \}] \mid a \in S \}$$

<u>Démonstration</u> : Comme S est dirigé, $\{ [\{ a \}] \mid a \in S \}$ est un sous-ensemble dirigé de $\hat{N}$. D'autre part, d'après 2.4.5 :

$$\sqcup \{ [\{ a \}] \mid a \in S \} = [\bigcup_{a\in S} \{ a \}] = [S] \quad .□$$

2.4.7.5. <u>Corollaire</u> : $\hat{N}$ admet une base isomorphe à N .

Nous rappelons la définition d'une base (voir Scott [17]) pour un domaine de calcul. Une *base* de $\hat{N}$ est un sous-ensemble de $\hat{N}$, au plus dénombrable, tel que tous les éléments de $\hat{N}$ s'obtiennent par limite d'ensembles dirigés ne contenant que des points de la base.

Démonstration : D'après la proposition précédente, par construction même de $\hat{N}$, si nous posons $B = \{ [\{ a \}] \mid a \in N \}$, tout élément $[S]$ de $\hat{N}$, s'obtient par limite d'un ensemble dirigé ne contenant que des éléments de B. Or B est isomorphe à N (voir 2.4.7.1.), donc B est dénombrable et est, donc bien, une base de $\hat{N}$. □

2.4.8. : Proposition : $\hat{N}$ est un ordre partiel continu ou , plus précisément, pour tout $[S]$ de $\hat{N}$:

$$[S] = \sqcup \{ [S'] \mid [S'] < [S] , [S'] \in \hat{N} \}$$

Démonstration : Posons : $X = \{ [S'] \mid [S'] < [S] , S' \in \hat{N} \}$. X est un ensemble dirigé, et, comme :

$$[S'] < [S] \implies [S'] \subseteq [S]$$

$\sqcup X \subseteq [S]$. D'autre part, les minorants de $[S]$ contiennent des éléments de la base, notamment les éléments de la forme $[\{ a \}]$ où a est dans S. D'après 2.4.7.4., nous savons que :

$$[S] = \sqcup \{ [\{ a \} \mid a \in S \}$$

Mais la proposition 2.4.7.2. indique qu'alors : $[\{ a \}] < [S]$.

Donc $[S] \subseteq \sqcup X$. □

2.5. Conclusion L'ensemble $\hat{N}$ est un ordre partiel complet et continu. De plus, il a la propriété que tout sous-ensemble dirigé à une structure de treillis. Cette structure semble se retrouver constamment dans tout domaine de calcul (voir Vuillemin [20]). Elle est moins riche que celles que considère Scott [17], qui se place à priori, dans un treillis complet et continu. Son approche simplifie, peut être, l'exposé, mais introduit, malheureusement, des points qui ne correspondent à aucune interprétation. Nous ne faisons, bien sûr, que suivre une approche similaire, qui s'en inspire fortement, mais nous essayons d'exclure , autant que possible, tout domaine qui n'est pas purement syntaxique. Une belle propriété des ordres partiels continus est que la fonction $\sqcap$, donnant le plus grand minorant commun de ses deux arguments, devient une fonction continue en ses deux arguments.

Nous sommes, à présent, prêts pour introduire une sémantique des λ-expressions.

3) Une sémantique des λ-Ω- expressions :

3.1. Définition :

Nous appelerons fonction de sémantique, ou plus simplement, *sémantique*, la fonction S de Λ dans $\tilde{N}$ telle que :

$$S(\varepsilon) = [\, A(\varepsilon)\,]$$

où $A(\varepsilon)$ est l'ensemble des approximants de ε (voir 1.3)

3.2. Notations :

Pour deux expressions ε et ε' :

1) $\varepsilon \subseteq \varepsilon'$ est équivalent à $S(\varepsilon) \subseteq S(\varepsilon')$
   $\varepsilon \equiv \varepsilon'$ " " " $S(\varepsilon) = S(\varepsilon')$

De même, nous écrirons $\varepsilon < \varepsilon'$ pour $S(\varepsilon) < S(\varepsilon')$, et, si X est un sous-ensemble de Λ, tel que $S(X)$ soit un sous-ensemble dirigé de $\bar{\tilde{N}}$, nous noterons $\sqcup X$ pour $\sqcup S(X)$.

3.3. Corollaires immédiats :

(1) $\varepsilon \equiv \varepsilon' \iff \varepsilon \subseteq \varepsilon, \ \varepsilon' \subseteq \varepsilon$
(2) $\varepsilon \subseteq \varepsilon' \iff A(\varepsilon) \subseteq A(\varepsilon')$

La relation $\subseteq$ n'est pas un ordre sur Λ, puisque $\subseteq$ n'est pas un ordre sur $\bar{N}$. D'autre part, en revenant à la définition initiale de l'ordre sur N, nous avons :

(3) $\varepsilon \subseteq \varepsilon' \iff \forall a \in A(\varepsilon).\ \exists b \in A(\varepsilon').\ a < b$

Cette dernière remarque semble assez convaincante. Nous avons, donc, $\varepsilon \subseteq \varepsilon'$ si pour tout approximant de ε, il existe un plus grand approximant de ε'. Autrement dit, ε est moins défini que ε', et possède, en quelque sorte, moins d'information que ε'.

(4) Si ε n'a pas de f.n.g., alors $\varepsilon \equiv \Omega$

(5) Si ε est en forme normale, et si ε ne contient pas de Ω, alors

$$\varepsilon \subseteq \varepsilon' \implies \varepsilon = \varepsilon'.$$

Ces deux remarques sont aussi évidentes. Si ε n'a pas de f.n.g., par application 1.3.3. , $A(\varepsilon) = \{\Omega\}$ et donc $\varepsilon \equiv \Omega$. Si ε est en forme normale, $\phi\varepsilon = \varepsilon$ et donc $A(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$. D'autre part, dans N, les β-formes normales sont des points maximaux, c'est à dire que, si a et b sont dans N et si a est une β-forme normale, on a : $a < b \implies a = b$. Donc, comme $\varepsilon \subseteq \varepsilon'$, pour tout a de $A(\varepsilon)$, il existe un b supérieur dans $A(\varepsilon')$. Comme $A(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$, $a = \varepsilon < b$ et, ε étant une β-forme normale, $\varepsilon = b$. On a : $\varepsilon \in A(\varepsilon')$ et, dans $A(\varepsilon')$, il ne saurait y avoir un approximant supérieur, si bien que : $\varepsilon = \varepsilon'$.

(6) Si ε et ε' sont deux formes normales, non α-interconvertibles, et ne contenant pas de Ω, alors :

$$\varepsilon \not\leq \varepsilon' \quad \text{et} \quad \varepsilon' \not\leq \varepsilon.$$

Cette remarque est aussi évidente et se montre aisément par contradiction.

(7) $\varepsilon \equiv \sqcup \{ a \mid a \in A(\varepsilon) \}$

(8) $a \in A(\varepsilon) \implies a < \varepsilon$

Ce sont deux conséquences directes des notations. (voir 2.4.7.2.)

3.4. <u>Discussion</u> :

Si, nous posons $Y = \lambda f.\ (\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx))$, nous pouvons vérifier qu'alors, par exemple :

$Yf \equiv Yf^2$

$Y(f \circ g) \equiv f(Y(g \circ f))$

où $f^2 = f \circ f$ et $f \circ g$ désigne Bfg

où $B = \lambda f.\lambda g.\lambda x.\ f(g(x))$

Nous retrouvons un certain nombre de propriétés, qui ont l'air sympathiques (voir Vuillemin [19]). Il reste à démontrer que cette sémantique est une bonne sémantique ou plus exactement, une sémantique adéquate, telle que l'entend Milner [11].

4) *S* est-elle une sémantique adequate des λ-Ω-expressions ?

4.1. Validité des règles de conversion.

4.1.1. Proposition : Si $\varepsilon \overset{*}{\rightarrow} \varepsilon'$, alors $\varepsilon \equiv \varepsilon'$.

Démonstration :

1) $\varepsilon' \sqsubseteq \varepsilon$. En effet, si $\varepsilon' \overset{*}{\rightarrow} \eta$, alors $\varepsilon \overset{*}{\rightarrow} \varepsilon' \overset{*}{\rightarrow} \eta$.
Donc $\varepsilon \overset{*}{\rightarrow} \eta$ et, par conséquent, $\mathcal{D}(\varepsilon') \subset \mathcal{D}(\varepsilon)$, c'est à dire $A(\varepsilon') \subset A(\varepsilon)$. Par définition de l'ordre sur $\bar{N}$, $A(\varepsilon') \sqsubseteq A(\varepsilon)$, donc $\varepsilon' \sqsubseteq \varepsilon$.

2) $\varepsilon' \sqsubseteq \varepsilon$. Considérons a quelconque dans $A(\varepsilon)$.
Par définition de $A(\varepsilon)$, il existe donc η tel que : $\varepsilon \overset{*}{\rightarrow} \eta$ et $a = \phi\eta$. Or $\varepsilon \overset{*}{\rightarrow} \varepsilon'$. D'après le théorème de Church-Roser, il existe η' tel que $= \varepsilon' \overset{*}{\rightarrow} \eta'$ et $\eta \overset{*}{\rightarrow} \eta'$. Donc : $\phi\eta < \phi\eta'$ (voir 1.3.2.). Et, comme $\varepsilon' \overset{*}{\rightarrow} \eta'$, $\phi\eta' \in A(\varepsilon')$. Pour tout a de $A(\varepsilon)$, il existe donc un plus grand élément dans $A(\varepsilon')$, et donc : $A(\varepsilon) \sqsubseteq A(\varepsilon')$ ou $\varepsilon \sqsubseteq \varepsilon'$. □

4.1.2. Validité des ω-règles de conversion :

Nous poserons $\varepsilon \underset{\omega}{\rightarrow} \varepsilon'$, si ε' s'obtient de ε par application d'une des deux ω-règles du §1, et $\varepsilon \underset{\omega}{\overset{*}{\rightarrow}} \varepsilon'$ pour une dérivation de longueur arbitraire.

4.1.2.1. Proposition : Si $\varepsilon \underset{\omega}{\rightarrow} \varepsilon'$, alors $\phi\varepsilon = \phi\varepsilon'$.

Démonstration :

Par induction structurelle sur $\phi\varepsilon$. Supposons $\|\phi\varepsilon\| = 0$.
Donc $\phi\varepsilon = \Omega$. D'après 1.1.2.2., deux cas se présentent :
Cas 1 :
ε n'est pas en f.n.g. Alors ε est de la forme :
$\varepsilon = \lambda x_1 \ldots x_m.(\lambda x.M)N\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n$

La ω-règle, appliquée à ε, soit interne à M,N ou un ε_i ($1 \leq i \leq n$), soit $M = \Omega$ et le Ω-radical est alors $\lambda x.M (= \lambda x.\Omega)$. Dans la première alternative, ε' n'est pas en f.n.g. et, donc, $\phi\varepsilon' = \Omega = \phi\varepsilon$. Dans le second cas, ε' est de la forme :

$$\varepsilon' = \lambda x_1 x_2 \ldots x_m.\Omega\ N\ \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n$$

et $\phi\varepsilon' = \Omega = \phi\varepsilon$, car ε' est une f.n.g. de variable de tête Ω (voir 1.1.2.).

<u>Cas 2</u> : ε est une f.n.g. de variable de tête Ω, c'est à dire :

$$\varepsilon = \lambda x_1 x_2 \ldots x_m.\Omega \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n$$

Trois sous-cas se présentent. Le ω-radical, sur lequel opère la conversion de ε à ε' est, soit interne à un des ε_i, soit $\Omega\varepsilon_1$, soit, si $n = 0$, $\lambda x_m.\Omega$. Dans chacune de ces alternatives, ε' est une f.n.g. de variable de tête Ω, et donc : $\phi\varepsilon' = \Omega = \phi\varepsilon$.

Supposons à présent, $|| \phi\varepsilon || > 0$. Nous avons, donc ε de la forme.

$$\varepsilon = \lambda x_1 x_2 \ldots x_m.x \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n \qquad (x \neq \Omega)$$

et le ω-radical, considéré dans la réduction de ε à ε', est interne à un des ε_i. Nous avons donc :

$$\varepsilon' = \lambda x_1 x_2 \ldots x_m.x \varepsilon'_1 \varepsilon'_2 \ldots \varepsilon'_n$$

où $\varepsilon_i \underset{\omega}{\rightarrow} \varepsilon'_i$ pour un i ($1 \leq i \leq n$) et, pour $j \neq i$,

on a : $\varepsilon_j = \varepsilon'_j$. Par hypothèse de récurrence, comme $|| \phi\varepsilon_i || < || \phi\varepsilon ||$, $\phi\varepsilon'_i = \phi\varepsilon_i$. D'où :

$$\begin{aligned}\phi\varepsilon &= \lambda x_1 x_2 \ldots x_m.x (\phi\varepsilon_1)(\phi\varepsilon_2) \ldots (\phi\varepsilon_n) \\ &= \lambda x_1 x_2 \ldots x_m.x (\phi\varepsilon'_1)(\phi\varepsilon'_2) \ldots (\phi\varepsilon'_n) \\ &= \phi\varepsilon'. \quad \square\end{aligned}$$

4.1.2.2. Corollaire : Si $\varepsilon \overset{*}{\underset{\omega}{\rightarrow}} \varepsilon'$, alors $\phi\varepsilon = \phi\varepsilon'$.

Preuve : Application immédiate de la proposition précédente . □

4.1.2.3. Lemme : $\phi(\varepsilon[x\backslash\Omega] < \phi(\varepsilon[x\backslash\eta])$

Démonstration : Par récurrence sur la taille de $\phi\varepsilon$.

Cas de base : $||\phi\varepsilon|| = 0$. On a donc : $\phi\varepsilon = \Omega$. Deux cas se présentent:

1) ε n'est pas en f.n.g. Alors, $\varepsilon[x\backslash\Omega]$) n'est pas en f.n.g. et $\phi(\varepsilon[x\backslash\Omega]) = \Omega < \phi(\varepsilon[x\backslash\eta])$ pour toute expression η.

2) ε est une f.n.g. de variable de tête Ω. Alors, $\varepsilon[x\backslash\Omega]$ l'est aussi et $\phi(\varepsilon[x\backslash\Omega]) = \Omega < \phi(\varepsilon[x\backslash\eta])$.

Cas général : $|| \phi\varepsilon || \geq 0$. On a donc :

$$\phi\varepsilon = \lambda y_1 y_2 \dots y_m . y a_1 a_2 \dots a_n$$

Et donc :

$$\varepsilon \mp \lambda y_1 y_2 \dots y_m . y \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n$$

avec $a_i = \phi\varepsilon_i$ pour tout i ($1 \leq i \leq n$). Deux cas se présentent à nouveau :

1) $y = x$, et alors : $\phi(\varepsilon[x\backslash\Omega] = \Omega$, car x est remplacé par Ω et $\varepsilon[x\backslash\Omega]$ est une f.n.g. de variable de tête Ω.

2) $y \neq x$, et alors, deux cas présentent aussi. Si x est l'une des variables y_i ($1 \leq i \leq m$), nous avons :

$$\varepsilon[x\backslash\Omega] = \varepsilon[x\backslash\eta] = \varepsilon$$

et par conséquent :

$$\phi(\varepsilon[x\backslash\Omega] = \phi(\varepsilon[x\backslash\eta] = \phi\varepsilon$$

D'où :

$$\phi(\varepsilon[x\backslash\Omega] < \phi(\varepsilon[x\backslash\eta].$$

Sinon, x n'étant pas une des variables liées y_i ($1 \leq i \leq m$) , on a :

$$\varepsilon[x\backslash\Omega] = \lambda y_1 y_2 \dots y_m . y (\varepsilon_1[x\backslash\Omega])(\varepsilon_2[x\backslash\Omega] \dots (\varepsilon_n[x\backslash\Omega])$$

et : $\varepsilon[\ x\backslash\eta\ ] = \lambda y_1 y_2 \ldots y_m . y\ (\ \varepsilon_1[\ x_1\backslash\eta\ ]\ )(\ \varepsilon_2[\ x\backslash\eta\ ]\ )\ldots(\ \varepsilon_n[\ x\backslash\eta\ ]\ )$

(Souvenons nous que nous ignorons les α-conversions). Par hypothèse de récurrence, comme $||\ \phi\varepsilon_j\ || < ||\ \phi\varepsilon\ ||$ pour tout j ($1 \leq j \leq n$), $\phi(\ \varepsilon_j[\ x\backslash\Omega\ ]) < \phi(\varepsilon_j[x\backslash\eta])$ et donc comme :

$\phi(\ \varepsilon[\ x\backslash\Omega\ ] = \lambda y_1 y_2 \ldots y_m . y(\ \phi(\ \varepsilon_1[\ x\backslash\Omega\ ]\ ))(\ \phi(\ \varepsilon_2[\ x\backslash\Omega\ ]\ ))\ldots(\ \phi(\ \varepsilon_n[\ x\backslash\Omega\ ]\ ))$
et :

$\phi(\ \varepsilon[\ x\backslash\eta\ ] = \lambda y_1 y_2 \ldots y_m . y(\ \phi(\ \varepsilon_1[\ x\backslash\eta\ ]\ ))(\ \phi(\ \varepsilon_2[\ x\backslash\eta\ ]\ ))\ldots(\ \phi(\ \varepsilon_n[\ x\backslash\eta\ ]\ ))$

on a : $\phi(\ \varepsilon[\ x\backslash\Omega\ ] < \phi(\ \varepsilon[\ x\backslash\eta\ ]\ )$, d'après la définition de l'ordre sur N. □

4.1.2.4. <u>Lemme</u> : $\varepsilon[\ x\backslash\Omega\ ] \subseteq \varepsilon[\ x\backslash\eta\ ]$

<u>Démonstration</u> : Considérons un approximant,a, quelconque de $\varepsilon[\ x\backslash\Omega\ ]$. Alors, a est l'approximation directe d'un ε'', dérivable de $\varepsilon[\ x\backslash\Omega\ ]$. Or les ensembles $\mathcal{D}(\ \varepsilon\ )$ et $\mathcal{D}(\ \varepsilon[\ x\backslash\Omega\ ])$ sont isomorphes, et donc, il existe un ε', dérivable de ε, tel que : $\varepsilon'' = \varepsilon'[\ x\backslash\Omega\ ]$. A la réduction $\varepsilon \overset{*}{\rightarrow} \varepsilon'$ correspond une réduction $\varepsilon[\ x\backslash\eta\ ] \overset{*}{\rightarrow} \varepsilon'[\ x\backslash\eta\ ]$. Or $\phi(\ \varepsilon'[\ x\backslash\Omega\ ] < \phi(\ \varepsilon'[\ x\backslash\eta\ ]$, et comme $a = \phi\varepsilon'' = \phi(\ \varepsilon'[\ x\backslash\eta\ ]$, et comme $\phi(\ \varepsilon'[\ x\backslash\eta\ ]$ est un approximant de $\varepsilon'[\ x\backslash\eta\ ]$, on a :

$$\varepsilon[\ x\backslash\Omega\ ] \subseteq \varepsilon[\ x\backslash\eta\ ].\ \square$$

4.1.2.5. <u>Proposition</u> : $C[\ \Omega\ ] \subseteq C[\ \varepsilon\ ]$, pour tout contexte $C[\ ]$ et toute expression ε.

<u>Démonstration</u> : Application du lemme précédent. Il suffit de considérer une variable x n'appartenant pas à $C[\ ]$ et à ε. Si nous posons $\eta = C[x]$, alors $C[\ \Omega\ ] = \eta[\ x\backslash\Omega\ ]$ et $C[\ \varepsilon\ ] = \eta[\ x\backslash\varepsilon\ ]$. □

4.1.2.6. <u>Proposition</u> : Si $\varepsilon \underset{\omega}{\overset{*}{\rightarrow}} \varepsilon'$ alors $\varepsilon' \subseteq \varepsilon$.

<u>Démonstration</u> : Application de la proposition précédente. En effet, chacune des applications des ω-règles revient à la substitution d'une sous-expression par Ω. □

4.1.2.7. <u>Lemme</u> : Si $\varepsilon \xrightarrow[\omega_2]{*} \eta$ et si $\varepsilon \underset{\beta}{\rightarrow} \varepsilon'$, alors il existe η' tel que :

$$\varepsilon' \xrightarrow[\omega_2]{*} \eta' \quad \text{et} \quad \eta \overset{*}{\underset{\beta}{\rightarrow}} \eta'.$$

<u>Démonstration</u> : Par récurrence sur la longueur de la ω_2- réduction $\varepsilon \xrightarrow[\omega_2]{*} \eta$

<u>Cas de base</u> : Immédiat car si la longueur de cette réduction est nulle, $\eta' = \eta$.

<u>Cas général</u> : Posons $\varepsilon \xrightarrow[\omega_2]{S} \varepsilon_1$ et $\varepsilon \overset{R}{\underset{\beta}{\rightarrow}} \varepsilon'$. Nous avons donc $\varepsilon_1 \xrightarrow[\omega_2]{*} \eta$ et la longueur de cette réduction est strictement inférieure à celle allant de ε à η. Trois cas se présentent :

1) S et R sont disjoints. Il existe un descendant unique S' de S dans ε'. De même R a un descendant unique R' dans ε_1. Et nous avons $\varepsilon' \xrightarrow[\omega]{S'} \varepsilon'_1$ et $\varepsilon_1 \overset{R'}{\underset{\beta}{\rightarrow}} \varepsilon'_1$. Par hypothèse de récurrence, nous savons qu'il existe un η' tel que : $\varepsilon'_1 \overset{*}{\underset{\omega_2}{\rightarrow}} \eta'$ et $\eta \overset{*}{\underset{\beta}{\rightarrow}} \eta'$. Donc η' est tel que : $\varepsilon \overset{*}{\underset{\omega_2}{\rightarrow}} \eta'$ et $\eta' \overset{*}{\underset{\beta}{\rightarrow}} \eta'$.

2) S contient R. Nous avons donc, $S = \Omega P$ et R est contenu dans P. S a donc un descendant unique S' dans ε', mais ε_1 ne contient aucun descendant de R, si bien que $\varepsilon' \xrightarrow[\omega_2]{S'} \varepsilon_1$. D'où, comme $\varepsilon_1 \xrightarrow[\omega_2]{*} \eta$, $\varepsilon' \xrightarrow[\omega_2]{*} \eta$.
Dans ce cas, donc, $\eta = \eta'$.

3) R contient S. Posons $R = (\lambda x.M)N$. S est donc contenu soit dans M, soit dans N. Dans ε_1, il existe un descendant unique R' de R, et dans chacune des deux alternatives précédentes, l'application simultanée de la ω_2-règle, aux descendants de S dans ε' donne ε'_1 tel que $\varepsilon_1 \overset{R'}{\underset{\beta}{\rightarrow}} \varepsilon'_1$. Donc, $\varepsilon' \xrightarrow[\omega 2]{*} \varepsilon'_1$ et comme la longueur de la réduction $\varepsilon_1 \xrightarrow[\omega_2]{*} \eta$ est inférieure à celle de $\varepsilon \xrightarrow[\omega_2]{*} \eta$, par hypothèse de récurrence, il existe η' tel que : $\varepsilon' \xrightarrow[\omega_2]{*} \eta'$ et $\eta \overset{*}{\underset{\beta}{\rightarrow}} \eta'$. Donc $\varepsilon' \xrightarrow[\omega_2]{*} \eta'$ et $\eta \overset{*}{\underset{\beta}{\rightarrow}} \eta'$. □

4.1.2.8. Proposition : Si $\varepsilon \xrightarrow[\omega_2]{*} \eta$ et si $\varepsilon \xrightarrow[\beta]{*} \varepsilon'$, alors il existe η' tel que $\varepsilon' \xrightarrow[\omega_2]{*} \eta'$ et $\varepsilon' \xrightarrow[\beta]{*} \eta'$.

Démonstration : Application directe du lemme précédent, en faisant une récurrence sur la longueur de $\varepsilon \xrightarrow[\beta]{*} \varepsilon'$. □

4.1.2.9. Proposition : Si $\varepsilon \xrightarrow[\omega_2]{*} \varepsilon'$, alors $\varepsilon \equiv \varepsilon$.

Démonstration : Nous savons déjà que $\varepsilon' \subseteq \varepsilon$. Montrons que nous avons aussi $\varepsilon \subseteq \varepsilon'$. Soit a un approximant de ε. Il existe un η tel que $\varepsilon \xrightarrow[\beta]{*} \eta$ et $\phi\eta = a$. D'après la proposition précédente, il existe η' tel que : $\eta \xrightarrow[\omega_2]{*} \eta'$ et $\varepsilon' \xrightarrow[\beta]{*} \eta'$. Or, $\phi\eta = \phi\eta'$ (voir 4.1.2.1.), et comme η' est dérivable de ε', $\phi\eta'$, est un approximant de ε'. Donc pour tout a, dans $A(\varepsilon)$, il existe un approximant $\phi\eta'$ de ε' tel que : $a = \phi\eta < \phi\eta'$. Nous avons donc, $\varepsilon \subseteq \varepsilon'$. □

4.1.2.10 Lemme : Si $\varepsilon \xrightarrow[\omega_2]{} \eta$ et si $\varepsilon \xrightarrow[\omega_1]{*} \varepsilon'$, alors il existe η' tel que $\eta \xrightarrow[\omega_1]{*} \eta'$ et $\varepsilon' \xrightarrow[\omega_2]{} \eta'$.

Démonstration : Par récurrence sur la longueur de la réduction $\varepsilon \xrightarrow[\omega_1]{*} \varepsilon$.

Cas de Base : Cette longueur est nulle, et la proposition est immédiate car $\eta = \eta'$.

Cas général : Posons $\varepsilon \xrightarrow[\omega_1]{S} \varepsilon_1$ et $\varepsilon \xrightarrow[\omega_2]{R} \eta$. Nous avons trois cas :

a) R et S sont disjoints. Si S' et R' sont respectivement les descendants de S et R dans η et ε_1, il est clair que si l'on pose : $\varepsilon_1 \xrightarrow[\omega_2]{R'} \eta_1$, alors $\eta \xrightarrow[\omega_1]{S'} \eta_1$ et, par hypothèse de récurrence, il existe η' tel que : $\eta_1 \xrightarrow[\omega_1]{*} \eta'$ et $\varepsilon' \xrightarrow[\omega_2]{} \eta'$. Donc η' est tel que : $\eta \xrightarrow[\omega_2]{*} \eta$ et $\varepsilon' \xrightarrow[\omega_2]{} \eta'$.

b) S contient R. Ce cas est impossible, car S est de la forme $\lambda x.\Omega$.

c) R contient S. Appelons R' le descendant unique de R dans ε_1. On a : $\varepsilon_1 \xrightarrow[\omega_2]{R'} \eta$, et par hypothèse de récurrence, il existe η' tel que $\eta \xrightarrow[\omega_2]{*} \eta'$ et $\varepsilon' \xrightarrow[\omega_2]{} \eta'$. □

4.1.2.11. <u>Lemme</u> : Si $\varepsilon \xrightarrow[\omega_1]{*} \varepsilon'$ et si $\varepsilon \xrightarrow[\beta]{} \eta$, alors il existe η', tel que : $\eta \xrightarrow[\omega_1]{*} \eta'$ et $\varepsilon' \xrightarrow[\omega_2,\beta]{*} \eta'$.

<u>Démonstration</u> : Par récurrence sur la longueur de la réduction $\varepsilon \xrightarrow[\omega_1]{*} \varepsilon'$.

<u>Cas de base</u> : Immédiat, car si la longueur de cette réduction est nulle, $\varepsilon' = \varepsilon$ et $\eta' = \eta$.

<u>Cas général</u> : La longueur de la réduction $\varepsilon \xrightarrow[\omega_1]{*} \varepsilon'$ est plus grande ou égale à 1. Posons $\varepsilon \xrightarrow[\omega_1]{S} \varepsilon_1$ et $\varepsilon \xrightarrow[\beta]{R} \eta$. Trois cas se présentent :

1) S et R sont disjoints. Alors S et R ont respectivement un descendant unique S' et R' dans η et ε_1, et, si nous posons $\varepsilon_1 \xrightarrow[\beta]{S'} \eta_1$, nous avons $\eta \xrightarrow[\omega_1]{S'} \eta_1$. Par hypothèse de récurrence, comme la longueur de la réduction $\varepsilon_1 \xrightarrow[\omega_1]{*} \varepsilon'$ est inférieure de 1 à celle de $\varepsilon \xrightarrow[\omega_1]{*} \varepsilon'$, il existe η' tel que: $\eta_1 \xrightarrow[\omega_1]{*} \eta'$ et $\varepsilon' \xrightarrow[\omega_2,\beta]{*} \eta'$; si bien que : $\eta \xrightarrow[\omega_1]{*} \eta'$ et $\varepsilon' \xrightarrow[\omega_2,\beta]{*} \eta'$.

2) S contient R. Ce cas est impossible car S est de la forme : $S = \lambda y.\Omega$.

3) R contient S. Posons R = ($\lambda x.M$)N.

a) Si S est contenu dans M ou dans N, l'application de la ω_1-règle aux descendants de S dans η donne une expression η_1 telle que : $\varepsilon_1 \xrightarrow[\beta]{R'} \eta_1$ si R' est le descendant de R dans ε_1. Nous avons donc : $\eta \xrightarrow[\omega_1]{*} \eta_1$ et, par récurrence, il existe η' tel que $\eta_1 \xrightarrow[\omega_1]{*} \eta'$ et $\varepsilon' \xrightarrow[\omega_2,\beta]{*} \eta'$.
Par conséquent, $\eta \xrightarrow[\omega_1]{*} \eta'$ et $\varepsilon' \xrightarrow[\omega_2,\beta]{} \eta'$

b) Si R = SN , où S = $\lambda x.\Omega$, posons ε = C[R].
On a donc : ε = C[($\lambda x.\Omega$)] , et ε_1 = C[ΩN], et η = C[Ω].

On peut donc obtenir η de ε_1 par une ω_2-règle sur un radical de la forme ΩN. Donc $\varepsilon_1 \xrightarrow[\omega_2]{} \eta$ et nous savons, comme $\varepsilon_1 \xrightarrow[\omega_1]{*} \varepsilon'$, qu'il existe η' tel que : $\varepsilon' \xrightarrow[\omega_2]{*} \eta'$ et $\eta \xrightarrow[\omega_1]{*} \eta'$ (voir 4.1.2.10). Donc η' est tel que $\varepsilon' \xrightarrow[\omega_2,\beta]{*} \eta'$ et $\eta \xrightarrow[\omega_1]{*} \eta'$.□

4.1.2. <u>Proposition</u> : Si $\varepsilon \xrightarrow[\omega_1]{*} \varepsilon'$, alors $\varepsilon \equiv \varepsilon'$.

<u>Démonstration</u> : Nous savons déjà que $\varepsilon' \subseteq \varepsilon$. Montrons que : $\varepsilon \subseteq \varepsilon'$. Soit a un approximant quelconque de ε, montrons qu'on peut le majorer par un approximant b de ε'. Soit η tel que $\phi\eta$ = a. On a : $\varepsilon \xrightarrow[\beta]{*} \eta$, et d'après la proposition précédente, il existe η' tel que $\eta \xrightarrow[\omega_1]{*} \eta'$ et $\varepsilon' \xrightarrow[\omega_2,\beta]{} \eta'$. Donc $\varepsilon' \equiv \eta'$ (voir 4.1.1 et 4.1.2.9.) ; et $\phi\eta = \phi\eta'$. Comme $\phi\eta' \subseteq \eta'$, nous avons $\phi\eta \subseteq \varepsilon'$, c'est à dire : a $\subseteq \varepsilon'$ et il existe, donc par définition de l'ordre, un approximant b de ε' tel que a < b. □

Nous venons donc de montrer que dans la sémantique, que nous considérons les deux ω-règles sont valides.

4.2. Définition d'une sémantique adéquate.

Nous reprenons les notions de sémantiques adéquates et minimales ("*fully abstract*"), dues à R. Milner [11].

4.2.1. Sémantique opérationnelle :

Définition : Pour toute relation d'équivalence R de $\Lambda \times \Lambda$, nous appelerons *sémantique opérationnelle* de Λ, la congruence $\simeq$ vis à vis des règles de formation du langage Λ, définie par :

$$\varepsilon \simeq \varepsilon' \quad \text{ssi} \quad \forall C[\ \ ] \, . \, C[\varepsilon] \; R \; C[\varepsilon'].$$

Il est aisé de vérifier que si $\varepsilon \simeq \varepsilon'$ alors $C[\varepsilon] \simeq C[\varepsilon']$ pour tout contexte $C[\ \ ]$. Cette définition de sémantique opérationnelle laisse un choix arbitraire de la relation R. En fait, et cela justifiera la définition, R traduit l'idée à priori que l'on a d'une sémantique. Pour notre langage Λ des λ-expressions, R sera définie de la manière suivante : $\varepsilon \; R \; \varepsilon'$ ssi ε a une forme normale, ε' aussi et si leurs formes normales sont égales à des α-conversions près. On aurait pu prendre pour R des définitions différentes, par exemple : $\varepsilon \; R \; \varepsilon'$ ssi ε et ε' peuvent se réduire sur une même variable x ou $\varepsilon \; R \; \varepsilon'$ ssi ε et ε' ont une f.n.g. chacun, etc... Nous ne considérerons par la suite, que la première définition.

4.2.2. Sémantique adéquate.

Pour toute sémantique $S : \Lambda \to D$, de Λ dans un domaine d'interprétation arbitraire D, notons $\varepsilon \equiv \varepsilon'$, pour $S(\varepsilon) = S(\varepsilon')$. Cette convention est conforme à celle que nous avons utilisé précédemment en 3.

Définition : Une sémantique S est *adéquate vis à vis d'une sémantique opérationnelle* $\simeq$ ssi elle satisfait les deux conditions suivantes :

1) S définit une congruence sur Λ vis à vis des règles de formation du langage Λ, c'est à dire :

$$\varepsilon \equiv \varepsilon' \implies \forall C[\ \ ] \; C[\varepsilon] \equiv C[\varepsilon']$$

2) S respecte $\simeq$, c'est à dire :

$$\varepsilon \equiv \varepsilon' \Longrightarrow \varepsilon \simeq \varepsilon$$

Remarquons que si D = Λ et $S(\varepsilon) = \varepsilon$ pour tout ε de Λ, la sémantique S est trivialement adéquate vis à vis de n'importe quelle sémantique opérationnelle.

4.2.3. Sémantique minimale :

Définition : Une sémantique S est *minimale vis à vis d'une sémantique opérationnelle* $\simeq$ ssi :

1) S est adéquate vis à vis de $\simeq$
2) La relation suivante est vérifiée :

$$\varepsilon \simeq \varepsilon' \Longrightarrow \varepsilon \equiv \varepsilon'$$

Nous allons nous efforcer de montrer que la sémantique S définie dans le paragraphe 3 est une sémantique adéquate vis à vis de la sémantique opératic rationnelle définie en 4.2.1. Par S , nous entendrons donc dorénavant la sémantique de 3, et "adéquate" signifiera "adéquate vis à vis de $\simeq$ définie en 4.2.1.".

4.3. S est-elle adéquate ?

Le problème difficile est de savoir si S définit une congruence sur Λ. Nous devons donc montrer en reprenant les notations du paragraphe 3, que l'on a :

$$\varepsilon \equiv \varepsilon \Longrightarrow C[\varepsilon] \equiv C[\varepsilon'] \quad \text{pour tout } C[\ ]$$

Nous montrerons, en fait, une relation plus forte, c'est à dire :

$$\varepsilon \subseteq \varepsilon \Longrightarrow C[\varepsilon] \subseteq C[\varepsilon'] \quad \text{pour tout } C[\ ].$$

Cette relation ressemble donc beaucoup à l'axiome de monotonie que l'on a chez Scott [17].

4.3.1. Rappel : $C[\Omega] \subseteq C[\varepsilon]$ pour tout contexte $C[\ ]$ et toute expression ε

Cette proposition a été montrée en 4.1.2.5.

4.3.2. Proposition : Si $a \in N$ et $b \in N$ et si $a < b$, alors

$$C[a] \subseteq C[b]$$

Démonstration : Simple application transitive de la proposition précédente car si $a < b$, alors a se distingue de b par la substitution de certaines sous-expressions de b par Ω. □

4.3.3. Proposition : Si $a \in A(\varepsilon)$, alors $C[a] \subseteq C[\varepsilon]$ pour tout contexte $C[\ ]$.

Démonstration : Si a est dans $A(\varepsilon)$, il existe η tel que $\varepsilon \overset{*}{\rightarrow} \eta$ et $a = \phi\eta$. Or, par application transitive de 4.3.1., $C[\phi\eta] \subseteq C[\eta]$, car $\phi\eta$ se distingue de η par le remplacement de certaines sous-expressions de η par Ω. Donc $C[a] \subseteq C[\eta]$. Or, comme $\varepsilon \overset{*}{\rightarrow} \eta$, on a $C[\varepsilon] \overset{*}{\rightarrow} C[\eta]$ pour tout contexte $C[\ ]$, et la β-conversion étant valide (voir 4.1.), on a : $C[\eta] \equiv C[\varepsilon]$.
En résumé : $C[a] \subseteq C[\eta] \equiv C[\varepsilon]$. □

4.3.4. Conjecture P : Pour toute expression ε et pour tout contexte $C[\ ]$, on a :

$$C[\varepsilon] \subseteq \bigsqcup \{ C[a] \mid a \in A(\varepsilon) \}$$

4.3.5. Proposition : Si la conjecture P est vraie, et si $\varepsilon \subseteq \varepsilon'$, alors on a : $C[\varepsilon] \subseteq C[\varepsilon']$ pour tout contexte $C[\ ]$.

Démonstration : Si $\varepsilon \subseteq \varepsilon'$, par définition de cet ordre, si a est un élément de $A(\varepsilon)$, on sait q'il existe un b dans $A(\varepsilon')$ tel que $a < b$. Donc pour tout contexte $C[\ ]$; par application de 4.3.2., on a : $C[a] \subseteq C[b]$. D'autre part, $A(\varepsilon)$ étant un sous-ensemble dirigé de N , $\{ C[a] \mid a \in A(\varepsilon) \}$ est un ensemble dirigé par application de 4.3.2. De même pour l'ensemble $\{ C[b] \mid b \in A(\varepsilon) \}$. Ces deux derniers ensembles ont donc une limite dans $\hat{N}$, puisque $\hat{N}$ est complet pour ses sous-ensembles dirigés. Et, de plus pour tout a de $A(\varepsilon)$, on sait qu'il existe un b de $A(\varepsilon')$ tel que :

$$C[a] \subseteq C[b] \subseteq \bigsqcup \{ C[b] \mid b \in A(\varepsilon') \}$$

c'est à dire, par définition de $\sqcup$:

$$\sqcup \{ C[a] \mid a \in A(\varepsilon) \} \subseteq \sqcup \{ C[b] \mid b \in A(\varepsilon') \}$$

Or, par 4.3.3., on sait que, pour tout b dans $A(\varepsilon')$, on a : $C[b] \subseteq C[\varepsilon']$. Donc $C[\varepsilon']$ est un majorant de l'ensemble $\{C[b] \mid b \in A(\varepsilon')\}$ et est supérieur à son plus petit majorant.
Donc, si $\varepsilon \subseteq \varepsilon'$, on a :

$$\sqcup \{C[a] \mid a \in A(\varepsilon)\} \subseteq \sqcup \{ C[b] \mid b \in A(\varepsilon')\} \subseteq C[\varepsilon']$$

et si la conjecture P est vraie, on a :

$$C[a] \subseteq \sqcup \{ C[a] \mid a \in A(\varepsilon) \} \subseteq \sqcup \{ C[b] \mid b \in A(\varepsilon') \} \subseteq C[\varepsilon']$$

c'est à dire : $C[\varepsilon] \subseteq C[\varepsilon']$. $\square$

Il ne nous reste plus qu'à démontrer la conjecture P.

5. Réductions de l'intérieur vers l'extérieur :

Dans cette partie, nous allons montrer que, pour toute expression et pour tout contexte C [ ], il existe des réductions, qui dépasseront toute approximation de C [ε], en réduisant d'abord C [ε] jusqu'à un certain C [η], puis en ne contractant, par la suite, que des radicaux qui ne descendent pas de radicaux de η. Toute réduction peut-elle donc être dépassée par une réduction travaillant de l'intérieur vers l'extérieur ? Nous retrouvons donc un problème proposé par P. Welch [22], et démontré par lui [21], [22]. Nous espérons présenter ici une démonstration simple et originale de ce résultat.

5.1. Définitions et présentation du problème :

5.1.1. Définition : une réduction $\varepsilon = \varepsilon_o \xrightarrow{R_1} \varepsilon_1 \xrightarrow{R_2} \varepsilon_2 \ldots\ldots \xrightarrow{R_n} \varepsilon_n = \eta$ fonctionne de l'intérieur vers l'extérieur ("inside-out reductions") ssi pour tout i ($1 \leq i \leq n$) et pour tout $j(i<j\leq n)$ R_j n'est pas un descendant d'un radical contenu dans R_i.

Nous dirons encore qu'une telle réduction est i.e. et nous noterons $\varepsilon \underset{i.e}{\overset{*}{\rightarrow}} \eta$ une réduction i.e. de ε à η.

Par exemple, si $I = \lambda x.x$ et $\varepsilon = (\lambda x.a(xy)(xz))(II)$ la réduction :

$\varepsilon \rightarrow (\lambda x.a(xy)(xz))\ I \rightarrow a(Iy)(Iz) \rightarrow ay(Iz)$ est i.e. mais la réduction :

$\varepsilon \rightarrow a((II)y)((II)z) \rightarrow a(Iy)((II)z) \rightarrow ay((II)z)$ n'est pas i.e..

5.1.2. Problème :

Il est clair que, pour un ε donné, l'ensemble des η tel que $\varepsilon \underset{i.e.}{\overset{*}{\rightarrow}} \eta$ est strictement compris dans l'ensemble des η tel que $\varepsilon \overset{*}{\rightarrow} \eta$. Mais nous aimerions montrer que si $\varepsilon \overset{*}{\rightarrow} \eta$, alors il existe un ε' tel que $\varepsilon \underset{i.e}{\overset{*}{\rightarrow}} \varepsilon'$ et $\eta \overset{*}{\rightarrow} \varepsilon'$. P. Welch [21], [22] démontre qu'il existe ε' tel que $\varepsilon \underset{i.e}{\overset{*}{\rightarrow}} \varepsilon'$ et $\phi\eta < \phi\varepsilon'$, ce qui est plus faible mais suffisant pour montrer que S est adéquate.

Nous allons redémontrer cette proposition en introduisant un λ-calcul typé, inspiré de celui de Wadsworth [21] où la proposition sera évidente si ce λ-calcul typé a une propriété Church-Rosser, puis nous reviendrons au λ-calcul normal où la transposition de ce qu'il se passe dans le λ-calcul typé nous donnera la solution du problème proposé.

5.2. Un λ-calcul typé :

5.2.1. Syntaxe :

Nous disposons du même alphabet $V = \{v_1, v_2, \dots\}$ que pour le λ-calcul normal. L'ensemble Λ_t des λ-expressions typées est le plus petit ensemble contenant :

$$\begin{cases} x^k & \text{si } x \in V \cup \{\Omega\} \quad \text{et } k \in \mathbb{N} \\ (\varepsilon\varepsilon')^k & \text{si } \varepsilon, \varepsilon' \in \Lambda_t \quad \text{et } k \in \mathbb{N} \\ (\lambda x \varepsilon)^k & \text{si } \varepsilon \in \Lambda_t \quad \text{et } x \in V \quad \text{et } k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Si M est l'une de ces trois expressions, le nombre k sera appelé le type de M, noté encore type(N). Les abbréviations sont identiques à celles du λ-calcul ordinaire. De même, nous avons des définitions similaires des variables libres et liées. La projection $M_{[n]}$ sur $n (n \geq o)$ d'une expression typée M est définie, par cas, par :

$$\begin{cases} x^k{}_{[n]} = x^p \\ (\varepsilon\varepsilon')^k{}_{[n]} = (\varepsilon\varepsilon')^p \\ (\lambda x \varepsilon)^k{}_{[n]} = (\lambda x \varepsilon)^p \end{cases}$$

si $p = \inf\{n,k\}$. La substitution, dans une expression typée M d'une variable libre x par une expression typée N, notée $M[x\backslash N]$, est définie inductivement par :

$$x^k[x\backslash N] = N_{[k]}$$
$$y^k[x\backslash N] = y^k$$

$(\varepsilon\varepsilon')^k[x\backslash N] = (\varepsilon[x\backslash N]\ \varepsilon'[x\backslash N])^k$

$(\lambda x.\varepsilon)^k[x\backslash N] = (\lambda x.\varepsilon)^k$

$(\lambda y.\varepsilon)^k[x\backslash N] = (\lambda z.\varepsilon[y\backslash z^n][x\backslash N])^k$ où $x \neq y$ et z est définie par :

1) si $x \notin VARLIB(\varepsilon)$ ou $y \notin VARLIB(N)$, $z = y$

2) sinon z est la première variable v_i de V telle que :

$z \notin VARLIB(\varepsilon) \cup VARLIB(N)$

et où n est supérieur à tous les types des sous-expressions de ε.

5.2.2. Conversions:

α- conversion : toute sous-expression de la forme $(\lambda x.M)^k$ peut être remplacée par $(\lambda y.M[x\backslash y^n])^k$, où n est un entier quelconque supérieur à tous les types des sous-expressions de M, si $y \notin VARLIB(M)$.

β- conversion : toute sous-expression de la forme $((\lambda x.M)^{n+1}N)^k$, où $n \geq o$, peut être remplacée par $M[x\backslash N_{[n]}]_{[n][k]}$.

Comme pour le λ-calcul ordinaire, nous avons la même notion de radical. Le degré d'un β-radical $((\lambda x.M)^n N)^k$ sera le nombre n. Ces conversions sont donc identiques à celles définies par Wadsworth [21]. Toutefois, ici la contraction d'un radical de degré 0 n'est pas défini. Une expression sera, donc, en forme normale si elle ne contient pas de β- radicaux de degré non nul. Naturellement, nous ignorerons autant que possible les α-conversions, l'égalité de deux expressions devant souvent être comprise comme l'égalité modulo des α-conversions et chaque fois que nous ne préciserons pas le type de la conversion, il faudra, bien sûr, comprendre β-conversion.

5.3. Propriété Church-Rosser du λ-calcul typé :

Nous utiliserons la méthode de Tait et Martin Löf (*) pour montrer que notre λ-calcul typé a une propriété Church-Rosser.

(*) Merci beaucoup à Gordon Plotkin pour m'avoir indiqué cette méthode et m'avoir aidé au cours de cette démonstration de la propriété Church-Rosser.

5.3.1. Réduction complète :

L'expression $C(\varepsilon)$, obtenue par réduction complète de ε, est définie inductivement par :

$$C(x^k) = x^k$$

$$C((\lambda x.M)^k) = (\lambda x.C(M))^k$$

$C((MN)^k) = (C(M)\ C(N))^k$ si M n'est pas de la forme $(\lambda x.M')^{n+1}$ où $n \geq o$

$$C(((\lambda x.M)^{n+1}N)^k) = C(M)\ [x\backslash C(N)_{[n]}]_{[n][k]}\ .$$

Il est clair que $C(\varepsilon)$ est l'expression obtenue de ε en contractant "en parallèle" tous les radicaux de ε de degré non nul. Mais nous allons définir formellement ce que l'on entend par réduction parallèle.

5.3.2. Réduction parallèle

La contraction en parallèle de plusieurs redexs d'une expression ε, permettant d'obtenir ε' à partir de ε, notée encore $\varepsilon \to \varepsilon'$, est définie inductivement par les règles suivantes :

règle C : $\dfrac{M \to M',\ N \to N'}{((\lambda x.M)^{n+1})N)^k \to M'[x\backslash N'_{[n]}]_{[n][k]}}$

règle S_1 : $x^k \to x^k$ si $x \in V\ U\{\Omega\}$

règle S_2 : $\dfrac{M \to M'}{(\lambda x.M)^k \to (\lambda x.M')^k}$

règle S_3 : $\dfrac{M \to M',\ N \to N'}{(MN)^k \to (M'N')^k}$

où M,N,M',N' sont des expressions typées quelconques. Si $\varepsilon \to \varepsilon'$, nous dirons encore que nous avons un pas de réduction parallèle de ε à ε'. Cette notation est cohérente avec la signification que nous attachions, auparavant, (voir Préliminaires) au signe $\to$. Il est, en effet, bien clair que si ε se réduit à ε' par la contraction d'un seul radical, nous avons bien que $\varepsilon \to \varepsilon'$, avec notre nouvelle notation.

5.3.3. Lemme 1 : Si $(\lambda x.M)^k \to N$, alors il existe M' tel que $N = (\lambda x.M')^k$ et $M \to M'$.

Démonstration : La seule règle applicable pour que l'on ait $(\lambda x.M)^k \to N$ est la règle S_2 et N est donc de la forme $(\lambda x.M')^k$ avec $M \to M'$. □

5.3.4. Lemme 2 : Si $x^k \to N$, alors $N = x^k$.

Démonstration : la seule règle applicable est S_1 et donc $N = x^k$. □

5.3.5. Lemme 3 :Si $M \to M'$, alors $M_{[n]} \to M'_{[n]}$.

Démonstration : par cas sur la règle appliquée pour la réduction $M \to M'$. Notons $p = \inf\{k,n\}$.

Cas 1 : Application de la règle S_1 : alors $M = M' = x^k$ et $M_{[n]} = M'_{[n]} = x^p$. Or la règle S_1 nous dit que $x^p \to x^p$, c'est-à-dire $M_{[n]} \to M'_{[n]}$.

Cas 2 : Application de la règle S_2 : alors $M = (\lambda x.M_1)^k$ et $M' = (\lambda x.M_1')^k$, avec $M_1 \to M_1'$. De plus $M_{[n]} = (\lambda x.M_1)^p$ et $M'_{[n]} = (\lambda x.M_1')^p$. Comme $M_1 \to M_1'$, par la règle S_2, nous avons : $(\lambda x.M_1)^p \to (\lambda x.M_1')^p$, c'est-à-dire $M_{[n]} \to M'_{[n]}$.

Cas 3 : Application de la règle S_3 : alors $M = (M_1M_2)^k$ et $M' = (M_1'M_2')^k$, avec $M_1 \to M_1'$ et $M_2 \to M_2'$. De plus, $M_{[n]} = (M_1M_2)^p$ et $M'_{[n]} = (M_1'M_2')^p$. Donc, comme $M_1 \to M_1'$ et $M_2 \to M_2'$, par la règle S_3 nous avons : $(M_1M_2)^p \to (M_1'M_2')^p$, c'est-à-dire $M_{[n]} \to M'_{[n]}$.

Cas 4 : Application de la règle C : alors $M = ((\lambda x.M_1)^{m+1}M_2)^k$ et $M' = M_1'[x\backslash M'_{2[m]}]_{[m][k]}$ avec $M_1 \to M_1'$ et $M_2 \to M_2'$. De plus, $M_{[n]} = ((\lambda x.M_1)^{m+1}M_2)^p$ et $M'_{[n]} = M_1'[x\backslash M'_{2[m]}]_{[m][p]}$. Donc, comme $M_1 \to M_1$ et $M_2 \to M_2'$, par application de la règle C, nous avons :

$$((\lambda x.M_1)^{m+1}M_2)^p \to M_1'[x\backslash M'_{2[m]}]_{[m][p]}$$

c'est-à-dire $M_{[n]} \to M'_{[n]}$. □

5.3.6. Lemme 4 : $M_{[n]}[x\backslash N] = M[x\backslash N]_{[n]}$

Démonstration : par cas sur M. Notons $p = \inf\{k,n\}$.

Cas 1 : $M = x^k$. Alors :

$$M_{[n]}[x\backslash N] = x^p[x\backslash N] = N_{[p]} = N_{[k][n]} = M[x\backslash N]_{[n]}$$

Cas 2 : $M = y^k$ où $x \neq y$. Alors :

$$M_{[n]}[x\backslash N] = y^p[x\backslash N] = y^p = y^k{}_{[n]} = M[x\backslash N]_{[n]}$$

Cas 3 : $M = (M_1M_2)^k$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned} M_{[n]}[x\backslash N] &= (M_1M_2)^p[x\backslash N] \\ &= (M_1[x\backslash N]M_2[x\backslash N])^p \\ &= (M_1[x\backslash N]M_2[x\backslash N])^k{}_{[n]} \\ &= M[x\backslash N]_{[n]} \end{aligned}$$

Cas 4 : $M = (\lambda y.M_1)^k$. Nous pouvons supposer $y \neq x$ et y non libre dans N ; ce que nous pouvons réaliser par des α-conversions que nous ignorons. Dans ce cas, nous avons :

$$\begin{aligned} M_{[n]}[x\backslash N] &= (\lambda y.M_1)^p[x\backslash N] \\ &= (\lambda y.M_1[x\backslash N])^p \\ &= (\lambda y.M_1[x\backslash N])^k{}_{[n]} \\ &= M[x\backslash N]_{[n]} \qquad \square \end{aligned}$$

5.3.7. Lemme 5 : Si $x \neq y$ et si x n'est pas libre dans B, on a :

$$M[x\backslash A][y\backslash B] = M[y\backslash B][x\backslash A[y\backslash B]]$$

pour toutes expressions typées M, A, B.

Démonstration : Posons $E_1 = M[x\backslash A][y\backslash B]$ et $E_2 = M[y\backslash B][x\backslash A[y\backslash B]]$ et raisonnons, à nouveau, par récurrence sur $||M||$.

Cas 1 : $M = x^k$. Alors : $E_1 = A_{[k]}[y\backslash B]$ et $E_2 = A[y\backslash B]_{[k]}$ et, par le lemme 4, $E_1 = E_2$.

<u>Cas 2</u> : $M = y^k$. Alors $E_1 = B_{[k]}$ et, de plus,

$E_2 = B_{[k]}[x\backslash A[y\backslash B]] = B[x\backslash A[y\backslash B]]_{[k]}$, par le lemme 4. Comme x n'est pas libre dans B, on a donc : $E_2 = B_{[k]} = E_1$.

<u>Cas 3</u> : $M = z^k$ où $z \neq x$ et $z \neq y$. Alors $E_1 = z^k = E_2$.

<u>Cas 4</u> : $M = (M_1M_2)^k$. Nous avons, dans ce cas :

$E_1 = (M_1[x\backslash A][y\backslash B]\ M_2[x\backslash A][y\backslash B])^k$ et

$E_2 = (M_1[y\backslash B][x\backslash A[y\backslash B]]\ M_2[y\backslash B][x\backslash A[y\backslash B]])^k$. Et, comme $||M_1|| < ||M||$ et $||M_2|| < ||M||$, par récurrence nous avons $E_1 = E_2$.

<u>Cas 5</u> : $M = (\lambda z.M_1)^k$. Nous supposons à nouveau $z \neq x$, $z \neq y$ et z ni libre dans A, ni dans B. Nous ne perdons rien à la généralité et nous pouvons toujours se ramener à ce cas par α-conversion. Alors :

$E_1 = (\lambda z.M_1[x\backslash A][y\backslash B])^k$ et

$E_2 = (\lambda z.M_1[y\backslash B][x\backslash A[y\backslash B]])^k$

Donc, comme $||M_1|| < ||M||$, on a $E_1 = E_2$ par récurrence. □

5.3.8. <u>Lemme 6</u> : Si $M \to M'$ et $N \to N'$, alors $M[x\backslash N] \to M'[x\backslash N']$, pour toutes expressions M,N,M',N' typées.

<u>Démonstration</u> : Raisonnons par récurrence sur la taille $||M||$ de M.

<u>Cas 1</u> : $||M|| = 0$, c'est-à-dire M est une variable.

<u>Cas 1.1.</u> : $M = x^k$. Par le lemme 2, comme $M \to M'$, on a $M = M' = x^k$ et, donc, $M[x\backslash N] = N_{[k]}$ et $M'[x\backslash N'] = N'_{[k]}$. Par le lemme 3, comme $N \to N'$, nous avons $N_{[k]} \to N'_{[k]}$.

<u>Cas 1.2.</u> : $M = y^k$ où $y \neq x$. Le lemme 2 indique encore que : $M = M' = y^k$. Et, donc, $M[x\backslash N] = y^k$ et $M'[x\backslash N'] = y^k$. Or, par application de la règle S_1, nous avons $y^k \to y^k$.

Cas 2 : $||M|| > 0$. Plusieurs cas se présentent selon la règle appliquée pour la réduction parallèle $M \to M'$.

Cas 2.1. : Application de la règle S_1 ; ce cas est impossible car nous avons supposé $||M|| > 0$.

Cas 2.2. : Application de la règle S_2 : Alors, on a : $M = (\lambda y.M_1)^k$ et $M' = (\lambda y.M'_1)^k$ avec $M_1 \to M'_1$. De plus, nous supposerons encore $y \neq x$ et y non libre dans N, condition que nous pouvons toujours réaliser par des α-conversions que nous ignorons. Comme $N \to N'$, il est clair que y n'est pas libre dans N', puisque VARLIB(N') est un sous-ensemble de VARLIB(N). Donc :

$$M[x\backslash N] = (\lambda y.M_1[x\backslash N])^k$$
$$M'[x\backslash N'] = (\lambda y.M'_1[x\backslash N'])^k$$

Comme $||M_1|| < ||M||$ et $M_1 \to M'_1$, nous avons, par récurrence : $M_1[x\backslash N] \to M'_1[x\backslash N']$. Donc, par la règle S_2 : $(\lambda y.M_1[x\backslash N])^k \to (\lambda y.M'_1[x\backslash N'])^k$, c'est-à-dire $M[x\backslash N] \to M'[x\backslash N']$.

Cas 2.3. : Application de la règle S_3 ; alors, on a : $M = (M_1M_2)^k$ et $M' = (M'_1M'_2)^k$ avec $M_1 \to M'_1$ et $M_2 \to M'_2$. Dans ce cas :

$$M[x\backslash N] = (M_1[x\backslash N]\ M_2[x\backslash N])^k$$
$$M'[x\backslash N'] = (M'_1[x\backslash N']M'_2[x\backslash N'])^k$$

Comme $||M_1|| < ||M||$, $||M_2|| < ||M||$ et $M_1 \to M'_1$, $M_2 \to M'_2$, nous avons par récurrence :

$$M_1[x\backslash N] \to M'_1[x\backslash N']$$
$$M_2[x\backslash N] \to M'_2[x\backslash N']$$

D'où, par la règle S_3 :

$$(M_1[x\backslash N]\ M_2[x\backslash N])^k \to (M'_1[x\backslash N']M'_2[x\backslash N'])^k$$

c'est-à-dire : $M[x\backslash N] \to M'[x\backslash N']$.

Cas 2.4. <u>Application de la règle C</u> : alors, nous avons :

$M = ((\lambda y.M_1)^{n+1}M_2)^k$ et $M' = M'_1[y\backslash M'_{2[n]}]_{[n][k]}$ avec $M_1 \to M'_1$ et $M_2 \to M'_2$

Nous supposons, à nouveau, $y \neq x$ et y non libre dans N' sans perdre en généralité. Dans ce cas :

$$M[x\backslash N] = ((\lambda y.M_1[x\backslash N])^{n+1}M_2[x\backslash N])^k$$

Comme $||M_1|| < ||M||$ et $||M_2|| < ||M||$ et $M_1 \to M'_1$, $M_2 \to M'_2$, nous avons par récurrence :

$$M_1[x\backslash N] \to M'_1[x\backslash N']$$

$$M_2[x\backslash N] \to M'_2[x\backslash N']$$

D'où, en appliquant la règle C :

$$((\lambda y.M_1[x\backslash N])^{n+1}M_2[x\backslash N])^k \to M'_1[x\backslash N'][y\backslash M'_2[x\backslash N']_{[n]}]_{[n][k]}$$

Et, par les lemmes 4 et 5, on a :

$$M[x\backslash N] \to M'_1[y\backslash M'_{2[n]}][x\backslash N']_{[n][k]}$$

c'est-à-dire, en utilisant encore le lemme 4 :

$$M[x\backslash N] \to M'_1[y\backslash M'_{2[n]}]_{[n][k]}[x\backslash N']$$

Donc $M[x\backslash N] \to M'[x\backslash N']$. □

5.3.9. <u>Lemme 7</u> : Si $M \to M'$, alors $M' \to C(M)$ pour toutes expressions M,M' typées.

<u>Démonstration</u> : par récurrence sur $||M||$, la taille de M.

<u>Cas 1</u> : $||M|| = 0$, c'est-à-dire $M = x^k$. Alors, par le lemme 2, $M' = x^k$. Et la définition de C donne $C(M) = x^k$. Et $M' = x^k \to x^k = C(M)$ par la règle S_1.

<u>Cas 2</u> : $||M|| > 0$. Nous raisonnons par cas sur la règle appliquée pour la réduction parallèle $M \to M'$.

<u>Cas 2.1.</u> : <u>Application de la règle S_1</u> : ce cas est impossible, puisque $||M|| > 0$.

Cas 2.2. Application de la règle S_2 : Nous avons alors :
$M = (\lambda x.M_1)^k$ et $M' = (\lambda x.M_1')^k$ avec $M_1 \to M_1'$. Comme $||M_1|| < ||M||$, nous avons par récurrence $M_1' \to C(M_1)$. D'où par la règle S_2, $(\lambda x.M_1')^k \to (\lambda x.C(M_1))^k$. Or, par définition, $C(M) = (\lambda x.C(M_1))^k$. Donc, dans ce cas : $M' \to C(M)$.

Cas 2.3. Application de la règle S_3 : Nous avons alors :
$M = (M_1M_2)^k$ et $M' = (M_1'M_2')^k$ avec $M_1 \to M_1'$ et $M_2 \to M_2'$. Comme $||M_2|| < ||M||$, nous avons par récurrence : $M_2' \to C(M_2)$. Nous allons distinguer deux sous-cas selon que M soit, ou non, un radical de degré non nul.

Cas 2.3.1. : M_1 n'est pas de la forme $(\lambda x.M_3)^{n+1}$. Alors, par définition, on a : $C(M) = (C(M_1)C(M_2))^k$. Comme $||M_1|| < ||M||$ $M_1 \to M_1'$, nous savons par récurrence que $M_1' \to C(M_1)$. Et, comme $M_2' \to C(M_2)$, par la règle S_3 : $(M_1'M_2')^k \to (C(M_1)C(M_2))^k$, c'est-à-dire $M' \to C(M)$.

Cas 2.3.2. : $M_1 = (\lambda x.M_3)^{n+1}$. Comme $M_1 \to M_1'$, nous avons par le Lemme 1, $M_1' = (\lambda x.M_3')^{n+1}$ avec $M_3 \to M_3'$. Or $||M_3|| < ||M||$ et on a, par récurrence $M_3' \to C(M_3)$. D'où, comme $M_2' \to C(M_2)$, par la règle C, nous avons :

$$M' = ((\lambda x.M_3')^{n+1}M_2')^k \to C(M_3)[x\backslash C(M_2)_{[n]}]_{[n][k]}$$

Or, dans ce cas, par définition, nous avons :

$$C(M) = C(((\lambda x.M_3)^{n+1}M_2)^k) = C(M_3)[x\backslash C(M_2)_{[n]}]_{[n][k]}$$

Cas 2.4. Application de la règle C : Dans ce cas, on a :
$M = ((\lambda x.M_1)^{n+1}M_2)^k$ et $M' = M_1'[x\backslash M_{2[n]}']_{[n][k]}$ avec $M_1 \to M_1'$ et $M_2 \to M_2'$.
Nous avons alors :

$$C(M) = C(M_1)[x\backslash C(M_2)_{[n]}]_{[n][k]}$$

Or $||M_1|| < ||M||$ et $||M_2|| < ||M||$. On a, par récurrence : $M_1' \to C(M_1)$ et $M_2' \to C(M_2)$, c'est-à-dire par le lemme 3 : $M_{2[n]}' \to C(M_2)_{[n]}$.
Si nous appliquons à présent le lemme 6, nous avons :

$$M_1'[x\backslash M_{2[n]}'] \to C(M_1)[x\backslash C(M_2)_{[n]}]$$

D'où, en utilisant le lemme 3, à nouveau, on a : $M' \to C(M)$. □

5.3.10. <u>Lemme 8</u> : Pour toute expression M typée, si $M \to M'$ et $M \to M''$, il existe alors une expression N typée telle que $M' \to N$ et $M'' \to N$.

<u>Démonstration</u> : le lemme 7 nous indique que nous n'avons qu'à prendre $N = C(M)$. □

5.3.11. <u>Proposition</u> : (Propriété Church-Rosser) Si $M \overset{*}{\to} M'$ et $M \overset{*}{\to} M''$, il existe N tel que $M' \overset{*}{\to} N$ et $M'' \overset{*}{\to} N$ pour toutes expressions typées M, M', M''.

<u>Démonstration</u> : Notons $M \overset{n}{\to} M'$ une réduction de n pas de réduction parallèle de M à M'. Montrons, par récurrence sur n+ p, que si $M \overset{n}{\to} M'$ et $M \overset{p}{\to} M''$, il existe N tel que $M' \overset{p}{\to} N$ et $M'' \overset{n}{\to} N$. Si n ou p est nul, la proposition est trivialle. Supposons donc $n \geq 1$ et $p \geq 1$.

1) Si $n = p = 1$, le lemme 8 montre l'existence de N tel que $M' \overset{1}{\to} N$ et $M'' \overset{1}{\to} N$.

2) Sinon, $n > 1$ ou $p > 1$. Supposons, par exemple, $n \neq 1$ l'autre cas étant purement symétrique. Soit M_1', l'expression telle que : $M \to M_1' \overset{n-1}{\to} M'$. Nous avons, donc, $M \to M_1'$ et $M \overset{p}{\to} M''$. Comme $1 + p < n + p$, puisque $n > 1$, par récurrence, nous savons qu'il existe M_1'' tel que $M_1' \overset{p}{\to} M_1''$ et $M'' \to M_1''$. Et, à nouveau, par récurrence, comme $M_1' \overset{n-1}{\to} M'$ et $M_1' \overset{p}{\to} M_1''$, il existe N tel que $M' \overset{p}{\to} N$ et $M_1'' \overset{n-1}{\to} N$. En résumé, il existe N tel que $M' \overset{p}{\to} N$ et $M'' \overset{n}{\to} N$. □

5.4. <u>Correspondance entre le λ-calcul typé et le λ-calcul non typé :</u>

5.4.1. : <u>Définition</u> : nous considérerons une fonction, <u>det</u> : $\Lambda_t \to \Lambda$, de "<u>détypage</u>" qui enlèvera les types d'une expression typée donnée, c'est-à-dire :

$\underline{det}(x^k) = x$

$\underline{det}((\varepsilon\varepsilon')^k) = (\underline{det}(\varepsilon)\ \ \underline{det}(\varepsilon'))$

$\underline{det}((\lambda x.\varepsilon)^k) = (\lambda x.\underline{det}(\varepsilon))$

Une expression U typée et telle que $\underline{det}(U) = \varepsilon$ sera encore appelée une affectation de type de ε.

5.4.2. Définition : Nous introduisons un ordre partiel sur Λ_t, noté $U < V$ si U et V sont des expressions typées et si $\underline{det}(U) = \underline{det}(V)$ tel que :

$x^k < x^l$ si $k \leq l$

$(\lambda x.U)^k < (\lambda x.V)^l$ si $k \leq l$ et $U < V$

$(UU')^k < (VV')^l$ si $k \leq l$ et $U < V$ et $U' < V'$

Donc $U < V$ signifie que U et V sont deux affectations de type d'une même expression mais, dans U, le type de chaque sous-expression est inférieur au type de la sous-expression correspondante dans V.

De plus, si $\underline{det}\ U = \underline{det}\ V$, nous définirons MAX(U,V), comme étant l'expression typée telle que :

$MAX(x^k, x^l) = x^p$

$MAX((UU')^k, (VV')^l) = (MAX(U,V)MAX(U',V'))^p$

$MAX((\lambda x.U)^k, (\lambda x.V)^l) = (\lambda x.MAX(U,V))^p$

où $p = \sup\{k,l\}$.

Il est clair que $U < MAX(U,V)$ et $V < MAX(U,V)$.

5.4.3. Lemme 1 : Si $U < V$ et $m \leq n$, alors $U_{[m]} < V_{[n]}$, pour toutes expressions U,V typées et pour tous entiers naturels m,n.

Démonstration : immédiate par cas sur U. Nous noterons $p = \inf\{k,m\}$ et $q = \inf\{l,n\}$. Remarquons que si $k \leq l$ et si $m \leq n$, on a $p \leq q$.

<u>Cas 1</u> : $U = x^k$. Alors $V = x^1$ où $k \leq 1$. Et, donc, $U_{[m]} = x^p$ et $U_{[n]} = x^q$. Et, comme $m \leq n$, on a $p \leq q$ et $x^p < x^q$.

<u>Cas 2</u> : $U = (\lambda x.U_1)^k$. Alors $V = (\lambda x.V_1)^1$ où $k \leq 1$ et $U_1 < V_1$. Donc, $U_{[m]} = (\lambda x.U_1)^p$ et $V_{[n]} = (\lambda x.V_1)^q$. Comme $m \leq n$, on a $p \leq q$. D'où, puisque $U_1 < V_1$, on a $(\lambda x.U_1)^p < (\lambda x.V_1)^q$.

<u>Cas 3</u> : $U = (U_1U_2)^k$. Alors $V = (V_1V_2)^1$ où $k \leq 1$, $U_1 < V_1$ et $U_2 < V_2$. Donc, $U_{[m]} = (U_1U_2)^p$ et $V_{[n]} = (V_1V_2)^q$. ET comme $m \leq n$, on a $p \leq q$. D'où, comme $U_1 < V_1$ et $U_2 < V_2$, on a $(U_1U_2)^p < (V_1V_2)^q$. □

5.4.4. <u>Lemme 2</u> : Si $U < U'$ et $V < V'$, alors on a : $U[x\backslash V] < U'[x\backslash V']$, pour toutes expressions typées U,U',V,V'.

<u>Démonstration</u> : par récurrence sur la taille de U, $||U||$.

<u>Cas 1.</u> $U = x^k$. Alors $U[x\backslash V] = V_{[k]}$ et, comme $U < U'$ on a : $U' = x^1$ où $k \leq 1$. D'où $U'[x\backslash V'] = V'_{[1]}$. Or, comme $V < V'$, on a : $V_{[k]} < V'_{[1]}$, par le lemme 1.

<u>Cas 2.</u> $U = y^k$. Alors, comme $U < U'$, on a : $U' = y^1$ où $k \leq 1$. Dans ce cas, $U[x\backslash V] = y^k = U$ et $U'[x\backslash V'] = y^1 = U'$.

<u>Cas 3.</u> $U = (U_1U_2)^k$. Alors, comme $U < U'$, on a : $U' = (U_1'U_2')^1$ où $k \leq 1$ et $U_1 < U_1'$ et $U_2 < U_2'$. D'autre part :

$$U[x\backslash V] = (U_1[x\backslash V]\ U_2[x\backslash V])^k$$
$$U'[x\backslash V'] = (U_1'[x\backslash V']\ U_2'[x\backslash V'])^1$$

Par récurrence, comme $||U_1|| < ||U||$ et $||U_2|| < ||U||$, nous avons : $U_1[x\backslash V] < U_1'[x\backslash V']$ et $U_2[x\backslash V] < U_2'[x\backslash V']$. D'où, par définition de l'ordre, $U[x\backslash V] < U'[x\backslash V']$.

<u>Cas 4.</u> $U = (\lambda y.U_1)^k$. Alors, comme $U < U'$, on a : $U' = (\lambda y.U_1')^1$ où $k \leq 1$ et $U_1 < U_1'$. De plus, sans perdre de la généralité, nous pouvons supposer $y \neq x$ et y non libre dans V, c'est-à-dire dans V' puisque VARLIB(V) et VARLIB(V') sont identiques. Donc :

$$U[x\backslash V] = (\lambda y.U_1[x\backslash V])^k$$
$$U'[x\backslash V'] = (\lambda y.U'_1[x\backslash V'])^1$$

Par récurrence, comme $||U_1|| < ||U||$, nous avons : $U_1[x\backslash V] < U'_1[x\backslash V']$. D'où $U[x\backslash V] < U'[x\backslash V']$. □

5.4.5. Lemme 3 : Pour toutes expressions M,N, non typées et pour toute expression U typée telles que $\underline{det}(U) = M[x\backslash N]$, il existe deux affectations de type de M et N, respectivement V et W, telles que $U < V[x\backslash W]$.

Démonstration : par récurrence sur la taille de M, $||M||$.

Cas 1 : $M = x$. Alors $M[x\backslash N] = N = \underline{det}(U)$. Posons, alors $W = U$ et $V = x^k$ où $k = \underline{type}(U)$. Alors $V[x\backslash W] = U_{[k]} = U$ et, donc, $U < V[x\backslash W]$ et $\underline{det}(V) = x$ et $\underline{det}(W) = N$.

Cas 2. $M = y$ où $y \neq x$. Alors $M[x\backslash N] = y = \underline{det}(U)$. Posons $V = y^k$ où $k = \underline{type}(U)$ et supposons W quelconque tel que $\underline{det}(W) = N$. Nous avons, donc, $V = U = y^k$ et, par conséquent, $U < V = V[x\backslash W]$ et $\underline{det}(V) = y$ et $\underline{det}(W) = N$.

Cas 3. $M = M_1M_2$. Nous avons, dans ce cas :

$$M[x\backslash N] = (M_1[x\backslash N]\ M_2[x\backslash N]) = \underline{det}(U).$$

Donc, nous avons : $U = (U_1U_2)^k$ où $\underline{det}(U_1) = M_1[x\backslash N]$ et $\underline{det}(U_2) = M_2[x\backslash N]$. Par récurrence, comme $||M_1|| < ||M||$ et $||M_2|| < ||M||$, nous connaissons l'existence d'expressions typées V_1, W_1, V_2 et W_2 telles que :

$$U_1 < V_1[x\backslash W_1] \text{ où } \underline{det}(V_1) = M_1 \text{ et } \underline{det}(W_1) = N$$
$$U_2 < V_2[x\backslash W_2] \text{ où } \underline{det}(V_2) = M_2 \text{ et } \underline{det}(W_2) = N$$

Posons $W = MAX(W_1, W_2)$. Nous avons $\underline{det}(W) = N$ et $W_1 < W$ et $W_2 < W$. Or, grâce au lemme 2, nous savons que : $V_1[x\backslash W_1] < V_1[x\backslash W]$ et $V_2[x\backslash W_2] < V_2[x\backslash W]$. Les définitions de l'ordre < et de la substitution nous donne :

$$U = (U_1U_2)^k < (V_1[x\backslash W_1]\ V_2[x\backslash W_2])^k$$
$$< (V_1[x\backslash W]\ \ V_2[x\backslash W])^k$$
$$= (V_1V_2)^k[x\backslash W]$$

Posons, donc, $V = (V_1V_2)^k$. Nous avons, alors, $U<V[x\backslash W]$ et $\underline{det}(V) = (\underline{det}(V_1)\underline{det}(V_2)) = M_1M_2 = M$ et $\underline{det}(W) = N$.

Cas 4 :$M = \lambda y.M_1$ .Nous supposons, encore, $y \neq x$ et y non libre dans N, ce que nous pouvons réaliser par α-conversions. Dans ce cas, $M[x\backslash N] = (\lambda y.M_1[x\backslash N]) = \underline{det}(U)$. Donc, $U = (\lambda y.U_1)^k$. Et $\underline{det}(U_1) = M_1[x\backslash N]$. Par récurrence, comme $||M_1|| < ||M||$, nous connaissons l'existence de V_1 et W tels que : $\underline{det}(V_1) = M_1$ et $\underline{det}(W) = N$ et tel que $U_1 < V_1[x\backslash W]$. Posons $V = (\lambda y.V_1)^k$. On a, donc : $U < (\lambda y.V_1[x\backslash W])^k = V[x\backslash W]$, puisque y n'est pas libre dans N, donc dans W. De plus, $\underline{det}(W) = N$ et $\underline{det}(V) = \lambda y.\underline{det}(V_1) = \lambda y.M_1 = M$. □

5.4.6. Lemme 4 : Si U,V,U' sont des expressions typées telles que : $U < V$ et $U \to U'$, alors il existe une expression V' typée telle que : $U' \to V'$ et $V < V'$.

Démonstration : par récurrence sur la taille de U, $||U||$.

Cas 1 : $||U|| = 0$. Alors $U = x^k$ et, donc, comme $U \to V$, $V = x^1$ où $k \leq 1$. De plus comme $U \to U'$, on a $U' = U$ (voir 5.3.4.). Par la règle S_1, nous avons $x^1 \to x^1$, c'est-à-dire $V \to V$. Et si nous posons $V' = V$, nous avons $V \to V'$ et $V < V'$.

Cas 2 : $||U|| > 0$. Raisonnons par cas, selon la règle appliquée pour la réduction parallèle $U \to U'$.

Cas 2.1. Application de la règle S_1 : ce cas est impossible puisque $||U|| > 0$.

Cas 2.2. <u>Application de la règle S_2</u>: alors $U = (\lambda x.U_1)^k$ et $U' = (\lambda x.U'_1)^k$ avec $U_1 \rightarrow U'_1$. De plus, comme $U < V$, on a $V = (\lambda x.V_1)^1$ où $k \leq 1$ et $U_1 < V_1$. Comme $||U_1|| < ||U||$, par récurrence nous connaissons l'existence de V'_1 tel que $U'_1 < V'_1$ et $V_1 \rightarrow V'_1$. Posons $V' = (x.V'_1)^1$. On a : $U' < V'$ et $V \rightarrow V'$ par application de la règle S_2.

Cas 2.3. <u>Application de la règle S_3</u> : alors $U = (U_1U_2)^k$ et $U' = (U'_1U'_2)^k$ avec $U_1 \rightarrow U'_1$ et $U_2 \rightarrow U'_2$. Comme nous avons $U < V$, V s'écrit : $V = (V_1V_2)^1$ où $k \leq 1$ et $U_1 < V_1$ et $U_2 < V_2$. Par récurrence comme $||U_1|| < ||U||$ et $||U_2|| < ||U||$, il existe V'_1 et V'_2 tels que :

$$U'_1 < V'_1 \quad \text{et} \quad V_1 \rightarrow V'_1$$
$$U'_2 < V'_2 \quad \text{et} \quad V_2 \rightarrow V'_2$$

Posons $V' = (V'_1V'_2)^1$. On a : $U' < V'$ et $V \rightarrow V'$ par la règle S_3.

Cas 2.4. <u>Application de la règle C</u> : alors on a : $U = ((\lambda x.U_1)^{n+1}U_2)^k$ et $U' = U'_1[x\backslash U'_{2[n]}]_{[n][k]}$ avec $U_1 \rightarrow U'_1$ et $U_2 \rightarrow U'_2$. Donc, comme $U < V$, nous avons $V = ((\lambda x.V_1)^{p+1}V_2)^1$ où $U_1 < V_1$, $U_2 < V_2$ et $n \leq p$, $k \leq 1$. Par récurrence, comme $||U_1|| < ||U||$ et $||U_2|| < ||U||$, on connait l'existence de V'_1 et V'_2 tels que :

$$U'_1 < V'_1 \quad \text{et} \quad V_1 \rightarrow V'_1$$
$$U'_2 < V'_2 \quad \text{et} \quad V_2 \rightarrow V'_2$$

Si on pose $V' = V'_1[x\backslash V'_{2[p]}]_{[p][1]}$, on a $V \rightarrow V'$ par la règle C. D'autre part, comme $U'_2 < V'_2$ et $n \leq p$, on a : $U'_{2[n]} < V'_{2[p]}$, par le lemme 1, et, donc, comme on a, en outre, $U'_1 < V'_1$, le lemme 2 nous indique que :

$$U'_1[x\backslash U'_{2[n]}] < V'_1[x\backslash V'_{2[p]}]$$

Et, par conséquent, comme $n \leq p$ et $k \leq 1$, on en déduit que $U' < V'$ (lemme 1). □

5.4.7. Lemme 5 : Si U,V,U' sont des expressions typées telles que $U \overset{*}{\rightarrow} U'$ et $U < V$, alors il existe une expression typée V' telle que $V \overset{*}{\rightarrow} V'$ et $U' < V'$.

Démonstration : par récurrence sur la longueur de la réduction $U \overset{*}{\rightarrow} U'$, en appliquant le lemme 4. □

Nous sommes, a présent, prêts pour montrer que l'on peut simuler toute réduction non typée par une réduction typée, pourvu que l'on se donne des types suffisamment élevés. Pour unifier l'exposé et conserver, dans sette partie, les mêmes schémas de démonstration, le symbole "→" signifiera "réduction parallèle" pour des réductions typées ou non. Nous ne nous attarderons pas à définir rigoureusement les axiomes de "→" pour les réductions parallèles non typées, car ils sont identiques à ceux des réductions typées, sauf qu'il n'y a pas bien sûr d'indiçage de toutes les expressions. Et nous désignerons les règles de "→" non typé, par le même nom que celui des règles correspondantes de "→" typé. La valeur des résultats ne sera pas affectée, car les réductions où un seul radical est contracté à chaque pas sont, bien sûr, un cas particulier des réductions où chaque pas est une réduction parallèle.

5.4.8. Lemme 6 : Si M et N sont deux expressions non typées telles que $M \rightarrow N$ et si W est une affectation de type N, alors il existe des affectations de type, U et V, respectivement de M et N, telles que $U \rightarrow V$ et $W < V$.

Démonstration : par récurrence sur la taille de M, $||M||$.

Cas 1. $||M|| = 0$, c'est-à-dire $M = x$. On a, alors, $N = x$ et, comme $\underline{det}(W) = N$, on a $W = x^k$. Posons $U = V = x^k = W$. On a $U \rightarrow V$, par la règle S_1 et $W < V$ par définition de l'ordre.

Cas 2 : $||M|| > 0$. Plusieurs cas se présentent, selon la règle appliquée pour la réduction parallèle non-typée $M \to N$.

Cas 2.1. Application de S_1 ; ce cas est impossible, car nous supposons $||M|| > 0$.

Cas 2.2. Application de S_2 : on a alors $M = \lambda x.M_1$ et $N = \lambda x.N_1$, où $M_1 \to N_1$. Alors, comme $\underline{det}(W) = N$, nous avons $W = (\lambda x.W_1)^k$ où $\underline{det}(W_1) = N_1$. Par récurrence, comme $||M_1|| < ||M||$, on sait qu'il existe U_1 et V_1 tels que : $U_1 \to V_1$ et $W_1 < V_1$ et $\underline{det}(U_1) = M_1$ et $\underline{det}(V_1) = N_1$. Par la règle S_2, si nous posons $U = (\lambda x.U_1)^k$ et $V = (\lambda x.U_1)^k$, nous avons $U \to V$. Or, $\underline{det}(U) = \lambda x.\underline{det}(U_1) = \lambda x.M_1 = M$ et, de même, $\underline{det}(V) = \lambda x.\underline{det}(V_1) = \lambda x.N_1 = N$. De plus, comme $W_1 < V_1$, nous avons $W = (\lambda x.W_1)^k < (\lambda x.V_1)^k = V$.

Cas 2.3. Application de S_3 : dans ce cas, $M = M_1M_2$ et $N = N_1N_2$ où $M_1 \to N_1$ et $M_2 \to N_2$. Comme $\underline{det}(W) = N$, W s'écrit : $W = (W_1W_2)^k$ où $\underline{det}(W_1) = N_1$ et $\underline{det}(W_2) = N_2$. Comme $||M_1|| < ||M||$ et $||M_2|| < ||M||$, par récurrence nous connaissons l'existence d'expressions typées U_1,V_1, U_2,V_2 telles que :

$$U_1 \to V_1 \text{ et } \underline{det}(U_1) = M_1 \text{ et } \underline{det}(V_1) = N_1 \text{ et } W_1 < V_1$$

$$U_2 \to V_2 \text{ et } \underline{det}(U_2) = M_2 \text{ et } \underline{det}(V_2) = N_2 \text{ et } W_2 < V_2$$

Posons $U = (U_1U_2)^k$ et $V = (V_1V_2)^k$; alors, par la règle S_3, nous avons $U \quad V$. D'autre part, $\underline{det}(U) = M$ et $\underline{det}(V) = N$. De plus, comme $W_1 < V_1$ et $W_2 < V$, on a $W < V$.

Cas 2.4. Application de C : Alors $M = ((\lambda x.M_1)M_2)$ et $N = N_1[x\backslash N_2]$ où $M_1 \to N_1$ et $M_2 \to N_2$. Nous avons donc $\underline{det}(W) = N_1[x\backslash N_2]$ et par le lemme 3, nous connaissons l'existence de W_1 et W_2, tels que $\underline{det}(W_1) = N_1$ et $\underline{det}(W_2) = N_2$ et $W < W_1[x\backslash W_2]$. Par récurrence, comme $||M_1|| < ||M||$ et $||M_2|| < ||N||$ il existe U_1,U_2,V_1,V_2 tels que :

$U_1 \to V_1$ et $\underline{det}(U_1) = M_1$ et $\underline{det}(V_1) = N_1$ et $W_1 < V_1$

$U_2 \to V_2$ et $\underline{det}\ (U_2) = M_2$ et $\underline{det}(V_2) = N_2$ et $W_2 < V_2$

Posons $U = ((\lambda x.U_1)^{q+1}U_2)^q$ où $q = \sup\{\underline{type}(V_1),\underline{type}(V_2)\}$ et $V = V_1[x\backslash V_2]$. En appliquant la règle C, nous avons :

$$U \to V_1[x\backslash V_{2[q]}]_{[q][q]} = V_1[x\backslash V_2]$$

c'est-à-dire $U \to V$. D'autre part, $\underline{det}(U) = M$ et $\underline{det}(V) = \underline{det}(V_1)[x\backslash\underline{det}(V_2)] = N_1[x\backslash N_2] = N$ et, comme $W_1 < V_1$ et $W_2 < V_2$, par le lemme 2, on a : $W_1[x\backslash W_2] < V_1[x\backslash V_2]$ et, donc, $W < V$. □

5.4.8. Proposition : Si ε et ε' sont deux expressions non-typées telles que $\varepsilon \overset{*}{\to} \varepsilon'$, alors il existe deux affectations de type U et U' respectivement de ε et ε' telles que $U \overset{*}{\to} U'$.

Démonstration : par récurrence sur la longueur l de la réduction $\varepsilon \overset{*}{\to} \varepsilon'$.

Cas 1. $l = 0$. Soit U une affectation de type quelconque de ε. On a alors $\varepsilon = \varepsilon'$ et si on pose $U' = U$, on a bien $\underline{det}(U') = \varepsilon'$.

Cas 2. $l > 0$. On a alors $\varepsilon \to \varepsilon_1 \overset{*}{\to} \varepsilon'$. Comme la longueur de $\varepsilon_1 \overset{*}{\to} \varepsilon'$ est strictement inférieure à celle de la réduction $\varepsilon \overset{*}{\to} \varepsilon'$, par récurrence nous connaissons l'existence de V_1 et V', typées, tels que $\underline{det}(V_1) = \varepsilon_1$, $\underline{det}(V') = \varepsilon'$ et $V_1 \overset{*}{\to} V'$. Par le lemme 6, il existe deux affectations de type, U et U_1, de ε et ε_1 telles que : $U \to U_1$ et $V_1 < U_1$ et, grâce au lemme 5, comme $V_1 \overset{*}{\to} V'$, on a : $U_1 \overset{*}{\to} U'$ où $V' < U'$. Donc U' est une affectation de type de ε' et il existe une réduction $U \to U_1 \overset{*}{\to} U'$. □

On peut, donc, simuler toute réduction non-typée, $\varepsilon \overset{*}{\to} \varepsilon'$, par une réduction typée, $U \overset{*}{\to} U'$, où U et U' sont deux affectations de type de et ε', pourvu que U ait des types suffisamment élevés sur chacune de ses sous-expressions. Réciproquement, il est bien clair que si $U = U_o \overset{S_1}{\to} U_1 \overset{S_2}{\to} U_2 \to \dots \overset{S_n}{\to} U_n = U'$ est une réduction typée, il lui correspond une réduction $\varepsilon = \varepsilon_o \overset{R_1}{\to} \varepsilon_1 \overset{R_2}{\to} \varepsilon_2 \overset{R_3}{\to} \dots \overset{R_n}{\to} \varepsilon_n = \varepsilon'$, non typée où les différents radicaux contractés R_i sont les sous-expressions correspondant aux S_i, dans ε_{i-1}.

5.5. Quelques propriétés supplémentaires du λ-calcul typé :

Nous allons étudier, d'abord, certaines propriétés des descendants, la notion de descendant dans le λ-calcul typé étant analogue à celle du λ-calcul ordinaire. Nous n'en redonnerons, donc, pas la définition. (Voir Préliminaires). Les radicaux d'une expression V typée qui ne descendent pas d'un radical d'une expression U typée, si $U \xrightarrow{R} V$, seront encore appelés radicaux créés par la contraction de V dans U, ou encore, radicaux créés par R. Nous nous intéresserons d'abord à deux propriétés de ces radicaux qui sont vraies dans le λ-calcul typé ou non-typé et, donc, pour simplifier l'exposé, nous nous placerons dans le λ-calcul non typé. Dans cette partie, nous aurons besoin de la notion de β-conversion étendue aux contextes, dont la signification est intuitivement évidente.

5.5.1. Lemme 1 : Si ε est une expression non-typée telle que :

1) ε n'est pas un radical,

2) ε est un contexte d'un radical R, c'est-à-dire $\varepsilon = C[R]$ où $R = (\lambda x.M)N$,

3) $\varepsilon \xrightarrow{R} \varepsilon'$ où ε' est un radical,

alors ε ne peut avoir que l'une des deux formes suivantes :

1) $\varepsilon = (\lambda x.M)NQ$ où $M = \lambda y.P$

2) $\varepsilon = (\lambda x.M)NQ$ où $M = x$ et $N = \lambda y.P$

où P et Q sont deux expressions non-typées quelconques.

Démonstration : Posons $\varepsilon' = (\lambda z.A)B$, et $R' = M[x\backslash N]$. Nous raisonnerons par cas selon la forme du contexte $C[\ ]$.

<u>Cas 1</u>. $C[\ ] = [\ ]$. Alors $\varepsilon = C[R] = R$ et ce cas est donc impossible puisque nous avons supposé que ε n'est pas un radical.

<u>Cas 2</u>. $C[\ ] = \lambda t.C'[\ ]$. Dans ce cas, nous avons $\varepsilon' = C[R'] = \lambda t.C'[R']$. Ce cas est encore impossible, puisqu'alors $\varepsilon' \neq (\lambda z.A)B$.

<u>Cas 3</u> . $C[\ ] = \eta C'[\ ]$. Alors, on a $\varepsilon' = C[R'] = \eta C'[R']$. Comme $\varepsilon' = (\lambda z.A)B$, on a $\eta = \lambda z.A$ et $B = C'[R']$. D'où, $\varepsilon = C[R] = (\lambda z.A)C'[R]$, et nous avons donc encore une impossibilité, car ε est supposé ne pas être un radical.

<u>Cas 4</u> : $C[\ ] = C'[\ ]\eta$. Comme $C[R'] = (\lambda z.A)B$, nous devons avoir $\eta = B$ et $C'[R'] = \lambda z.A$. Donc, deux sous cas se présentent :

<u>Cas 4.1</u>. $C'[\ ] = \lambda z.C_1[\ ]$. Mais, ce cas est impossible, car, alors $\varepsilon = C[R] = (\lambda z.C_1[R])B$ et est donc un radical.

<u>Cas 4.2</u>. $C'[\ ] = [\ ]$. Alors, nous avons $R' = \lambda z.A$, c'est-à-dire $M[x\backslash N] = \lambda z.A$. Et il est clair, par un raisonnement par cas sur M, que les deux seuls cas possibles sont :

1) $M = x$ et $N = \lambda z.A$

2) $M = \lambda y.P$ pour une certaine expression P et une variable y,

c'est-à-dire, en résumé, pour ε, nous ne pouvons avoir que les deux cas suivants :

1) $\varepsilon = (\lambda x.M)N\ B$ où $M = x$ et $N = \lambda z.A$

2) $\varepsilon = (\lambda x.M)N\ B$ où $M = \lambda y.P$ $\square$

5.5.2. <u>Lemme 2</u> : Si $R = (\lambda x.M)N$ est un radical non typé et si ε est une sous-expression de R, c'est-à-dire $R = C[\ ]$, telle que :

1) ε n'est pas un radical, et $\varepsilon \neq x$,

2) $C[\ ]$ a une structure de radical,

3) si ε' est tel que $C[\ ] \overset{C[\ ]}{\rightarrow} C'[\ ]$ et $C[\varepsilon] \overset{R}{\rightarrow} C'[\varepsilon']$,

alors ε' est un radical,

alors $C[\ ] = (\lambda x.C_1[\ ])N$ et $\varepsilon = xQ$ et $N = \lambda y.P$ où P,Q sont des expressions quelconques et $C_1[\,]$ un contexte quelconque.

Démonstration : comme $C[\ ]$ a une structure de radical, on a deux cas :

Cas 1. $C[\ ] = (\lambda x.M)\ C_1[\ ]$. Alors $N = C_1[\varepsilon]$ et on a : $C'[\ ] = M[x\backslash C_1[\,]\ ]$. D'autre part, $C'[\varepsilon'] = M[x\backslash N]$, c'est-à-dire $C_1[\varepsilon'] = N = C_1[\varepsilon]$. Nous avons donc $\varepsilon = \varepsilon'$ et ce cas est impossible car ne peut être à la fois un radical et différent d'un radical.

Cas 2. $C[\ ] = (\lambda x.C_1[\ ])N$. Supposons x non libre dans N, ce que nous pouvons toujours réaliser par une α-conversion que nous ignorons. Alors $C'[\ ] = C_1[x\backslash N]\ [\ ]$ et $C'[\varepsilon'] = M[x\backslash N] = C_1[\varepsilon][x\backslash N] = C_1[x\backslash N][\varepsilon[x\backslash N]]$, c'est-à-dire $\varepsilon' = \varepsilon[x\backslash N]$. Or nous avons supposé que ε n'est pas un radical et ε' est un radical. Posons $\varepsilon' = (\lambda y.P)Q$.En raisonnant par cas sur ε, comme $\varepsilon \neq x$, le seul cas possible est donc $\varepsilon = xQ$ et $N = \lambda y.P$.□

5.5.3. Proposition ; si ε, ε' sont deux expressions non typées, si $R = (\lambda x.M)N$ est un radical de ε tel que $\varepsilon \overset{R}{\to} \varepsilon'$, et si S est un radical de ε' créé par R dans ε', la sous expression η, père de S dans ε, ne peut être que l'une des trois formes suivantes :

1) $\eta = (\lambda x.M)NQ$ où $M = \lambda y.P$ et $(\lambda x.M)N$ le radical contracté,

2) $\eta = (\lambda x.M)NQ$ où $M = x$, $N = \lambda y.P$ et $(\lambda x.M)N$ est le radical contracté,

3) $\eta = xQ$ où $N = \lambda y.P$ et η est une sous expression de M.

Démonstration : Soit $R' = M[x\backslash N]$ le contracté de R dans ε'. Nous avons trois cas :

1) Si S est une sous expression disjointe de R', alors le père de S dans ε est une sous expression identique à S et, donc, S ne peut être un radical créé par R dans ε'.

2) si S contient strictement R', le père η de S dans ε contient R, c'est-à-dire $\eta = C[R]$ pour un certain contexte C[ ]. Et, comme S est un radical créé par R dans ε', nous avons η différent d'un radical et $S = C[R']$, qui est un radical. D'après le lemme 1, nous ne pouvons qu'avoir :

a) $\eta = (\lambda x.M)NQ$ où $M = \lambda y.P$

b) $\eta = (\lambda x.M)NQ$ où $M = x$ et $N = \lambda y.P$

3) Si S est contenu, au sens large, dans R', d'après la définition des descendants (voir Préliminaires), le père η de S dans ε ne peut qu'être contenu dans M ou dans N. De plus, cette définition nous indique que $\eta \neq x$. Il existe, donc, un contexte C[ ], qui a une structure de radical, tel que $R = C[\eta]$. D'autre part, S est tel que, si $C[\ ] \overset{C[\ ]}{\to} C'[\ ]$, on a $C[\eta] \overset{R}{\to} C'[S]$. Donc, comme η n'est pas un radical, d'après le lemme 2, η est une sous expression de M telle que : $\eta = xQ$ où $N = \lambda y.P$. □

5.5.4. <u>Proposition</u> : Si U,V sont deux expressions typées et si R est un radical de U tel que $U \overset{R}{\to} V$, alors les radicaux créés par R dans V ont un degré strictement inférieur à celui de R.

<u>Démonstration</u> : Soit S un radical créé par R dans V. Posons $R = ((\lambda x.M)^{n+1}N)^k$ où $n, k \geq 0$. Soit η le père de S dans U. D'après la proposition précédente (valable bien sûr, aussi dans le λ-calcul typé), trois cas se présentent :

1) $\eta = (((\lambda x.M)^{n+1}N)^k Q)^l$ où $M = (\lambda y.P)^p$ et $l,p \geq 0$. Nous supposerons x et y non libres dans N et $y \neq x$, ce qui peut être toujours réalisé par des α-conversions que nous ignorons. Alors, nous avons :

$$S = (M[x\backslash N_{[n]}]_{[n][k]}Q)^l$$

c'est-à-dire

$$S = ((\lambda y.P[x\backslash N_{[n]}])^p{}_{[n][k]}Q)^l$$

Si nous posons $m = \inf\{p,n,k\}$, on a $m \leq n$ et :

$$S = ((\lambda y.P[x\backslash N_{[n]}])^{m}Q)^{1}$$

La radical S est, donc, de degré m strictement inférieur au degré n+1 de R.

2) $\eta = (((\lambda x.M)^{n+1}N)^{k}Q)^{1}$ où $M = x^{q}$, $N = (\lambda y.P)^{p}$ et $1,p,q \geq 0$. Nous avons alors :

$$S = (x^{q}[x\backslash(\lambda y.P)^{p}{}_{[n]}]_{[n][k]}Q)^{1}$$

et, si nous posons $m = \inf\{p,q,n,k\}$, on a :

$$S = ((\lambda y.P)^{m}Q)^{1}$$

Le radical S est, alors, de degré m strictement inférieur au degré n+1 de R.

3) η est une sous-expression de M, telle que $\eta = (x^{q}Q)^{1}$, $N = (\lambda y.P)^{p}$ et $1,p,q \geq 0$. De plus, nous supposerons x non libre dans N, sans perdre en généralité. Alors, nous avons : $S = \eta[x\backslash N_{[n]}]$, c'est-à-dire :

$$S = (x^{q}Q)^{1}\ [x\backslash(\lambda y.P)^{p}{}_{[n]}]$$

et, si on pose $m = \inf\{p,q,n\}$, on a :

$$S = ((\lambda y.P)^{m}Q)^{1}$$

Le radical S est, encore, dans ce cas de degré m strictement inférieur au degré n+1 de R. □

5.5.5. Proposition : si U,V sont deux expressions typées, si R est un radical de U tel que $U \xrightarrow{R} V$ et si S est un autre radical de U, le (s) descendant (s) de S dans V ont un même degré que S.

Démonstration : par cas selon la position relative de R et S. Posons $R = ((\lambda x.M)^{n+1}N)^{k}$ et $S = ((\lambda y.P)^{m}Q)^{1}$.

1) Si S est disjoint de R, S a un descendant unique dans V, qui lui est identique, donc qui est de même degré.

2) Si S contient strictement R, le radical R est contenu dans P ou dans Q et le descendant unique de S dans V est de la forme $((\lambda y.P')^m Q')^1$, soit P, soit Q, est différent de P, ou de Q. Ce descendant a, donc, même degré que S.

3) Si S = R, alors S n'a pas de descendant dans V.

4) Si S est contenu dans N, il existe un contexte C[ ] tel que N = C[S]. Les descendants de S sont, donc les différentes occurrences de S dans M[x\C[S]], c'est-à-dire des radicaux de la forme $((\lambda y.P)^m Q)^p$, où seul p, d'après la définition de la substitution, peut être différent de 1. Ces descendants de S ont, donc, même degré que S. □

5.5.6. <u>Proposition</u> : Toute expression typée a une forme normale.

<u>Démonstration</u> : Soit f : $\Lambda_t \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, la fonction qui associe à toute expression typée U, la paire d'entiers naturels, formée du degré des radicaux de U de degré le plus élevé et du nombre de ces radicaux. Supposons que U ne soit pas en forme normale.

Soit R un de ces radicaux, qui ne contienne à l'intérieur de lui-même, aucun autre radical de degré maximum. Un tel radical existe toujours. Soit N son degré, et considérons la réduction $U \overset{R}{\to} V$.

Deux sortes de radicaux existent dans V, les radicaux qui descendent d'un radical de U, les radicaux créés par R dans V. Les premiers ont même degré que leurs pères respectifs, les seconds ont un degré strictement inférieur à N (voir 5.5.4. et 5.5.5.). Posons f(U) = $<N,n>$. Comme U n'est pas en forme normale, on a N > 0. Si n = 0, comme R n'a pas de descendant dans V, f(V) = $<N',n'>$ où N' < N. Si n ≠ 0, comme R ne contient pas de radical de degré N, aucune dupplication de radicaux de degré N, différents de R, n'est possible et, alors, f(V) = $<N,n-1>$. Dans ces deux cas, par rapport à l'ordre alphabétique usuel, $f(V) < f(U)$ et, si nous continuons à contracter systématiquement un radical de degré maximum qui ne contienne pas de radical de même degré, comme l'ordre alphabétique est un bon ordre, nous nous arrêterons un jour sur une forme normale U' telle que $f(U') = \langle 0,p \rangle$. □

Cette démonstration se trouve dans Wadsworth [ ] pour un λ-calcul légèrement différent, et dans Morris [ ].

5.5.7. Proposition : Toute réduction "intérieur d'abord", c'est-à-dire consistant à contracter systématiquement un radical qui ne contienne aucun radical de degré non nul, atteint une forme normale dans le λ-calcul typé.

Démonstration : Soit $U = U_o \overset{R_1}{\rightarrow} U_1 \overset{R_2}{\rightarrow} U_2 \overset{R_3}{\rightarrow} \ldots$ une réduction "intérieur d'abord" issue d'une expression U typée. Soit N le degré des radicaux de degré maximal de U. Si N = o, U est en forme normale et, donc, nous nous intéresserons qu'au cas où $N > 0$. Soit $f : \Lambda_t \rightarrow \mathbb{N}^N$, la fonction telle que la $i^{\text{ème}}$ composante de $f(U_j)$, notée $f(U_j)_i$ pour $1 \leq i \leq N$, soit le nombre de radicaux de degré $N+1-i$, et considérons l'ordre alphabétique sur $\mathbb{N}^N$, noté provisoirement ≤. Soit R_j le radical contracté de U_{j-1} à U_{j+1}. Soit k le degré de R_j.

1) Les radicaux de U_{j-1} qui sont disjoints de R_j ou qui contiennent strictement R_j ont un descendant unique dans U_j et de même degré (voir 5.5.5.).

2) Les radicaux de U_{j-1}, qui sont strictement contenus dans R_j, sont tous de degré nul, d'après la définition de la réduction intérieur d'abord. Leurs descendants, éventuellement multiples, restent de degré nul (voir 5.5.5.).

3) Les radicaux créés par R_j dans U_j sont tous de degré strictement inférieur à k (voir 5.5.4.).

3) R_j n'a pas de descendant dans U_j.

Pour ces quatre raisons, et comme les radicaux de U_j soit descendent d'un radical de U_{j-1}, soit sont crées par R_j, on a :

$$f(U_j)_i = f(U_{j-1})_i \text{ pour } 1 \le i < k$$

$$f(U_j)_k = f(U_{j-1})_k - 1$$

Donc, pour l'ordre de $\mathbb{N}^N$, on a $f(U_{j-1}) < f(U_j)$ et comme l'ordre alphabétique est un bon ordre, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de chaine infinie strictement décroissante, il existe U_n tel que $f(U_n)_i = 0$ pour tout i. Autrement dit la réduction $U_0 \xrightarrow{R_1} U_1 \xrightarrow{R_2} U_2 \xrightarrow{R_3} \ldots$ atteint une expression U_n en forme normale.

5.6. Solution du problème :

5.6.1. Solution dans le λ-calcul typé :

Nous n'avons pas défini le problème pour le λ-calcul typé. Mais la notion de réduction i.e. (intérieur-extérieur) est évidemment définie de manière identique à celle du λ-calcul ordinaire. Et si U,V sont deux expressions typées telles que $U \overset{*}{\rightarrow} V$, nous nous demandons s'il existe une expression W telle que $V \overset{*}{\rightarrow} W$ et $U \underset{i.e.}{\overset{*}{\rightarrow}} W$.

5.6.2. Proposition : Une réduction "intérieur d'abord" est i.e.

Démonstration : Soit $U = U_o \xrightarrow{R_1} U_1 \xrightarrow{R_2} \ldots \xrightarrow{R_n} U_n = V$ une réduction intérieur d'abord. Considérons le radical R_i contracté entre U_{i-1} et U_i. Supposons que le radical R_j $(i < j)$, contracté entre U_{j-1} et U_j, descende d'un radical R, interne à R_i. On a $R \neq R_i$, car R_i n'a pas de descendant dans R_j, par définition. D'autre part, tous les radicaux strictement contenus dans R_i sont de degré nul, comme la réduction est intérieur d'abord. Le radical R_j descend donc d'un radical de degré nul. Et par 5.5.5, R_j a un degré nul. Ce qui est impossible, car R_j est contracté entre U_{j-1} et U_j, et la β-conversion typée n'a été définie que pour des radicaux de degré non nul. La réduction considérée est, donc, i.e. □

5.6.1.2. Proposition : Si U,V sont deux expressions typées telles que $U \overset{*}{\to} V$, alors il existe une expression W typée telle que : $V \overset{*}{\to} W$ et $U \underset{i.e.}{\overset{*}{\to}} W$.

Démonstration : Par la proposition 5.5.6., nous savons que toute expression U a une forme normale W. Cette forme normale est unique, car le calcul typé a la propriété Church-Rosser. En appliquant à nouveau cette propriété, comme $U \overset{*}{\to} V$ et $U \overset{*}{\to} W$, nous avons $V \overset{*}{\to} W$. Or la proposition 5.5.7. nous dit que toute réduction intérieur-d'abord issue de U atteint une forme normale, donc la forme normale unique W. Et par la proposition précédente, une telle réduction est i.e. Nous connaissons donc l'existence d'une réduction i.e. $U \underset{i.e}{\overset{*}{\to}} W$ entre U et W, où $V \overset{*}{\to} W$. □

5.6.2. Solution dans le λ-calcul non typé :

Proposition : Si ε, ε' sont deux λ-Ω expressions, non typées, telles que $\varepsilon \overset{*}{\to} \varepsilon'$, alors il existe une expression η telle que : $\varepsilon' \overset{*}{\to} \eta$ et $\varepsilon \underset{i.e.}{\overset{*}{\to}} \eta$.

Démonstration : Si $\varepsilon \overset{*}{\to} \varepsilon'$, la proposition 5.4.8. indique qu'il existe deux affectations de type de ε et ε', respectivement U et V telles que $U \overset{*}{\to} V$. Or, la proposition précédente montre l'existence d'une expression W, typée, telle que : $V \overset{*}{\to} W$ et $U \underset{i.e.}{\overset{*}{\to}} W$. Posons η = det(W). A la réduction $V \overset{*}{\to} W$ correspond donc une réduction $\varepsilon' \overset{*}{\to} \eta$, et à la réduction $U \overset{*}{\to} W$ une réduction $\varepsilon \overset{*}{\rightarrow} \eta$. De plus, comme la réduction $U \overset{*}{\underset{i.e.}{\rightarrow}} W$ est i.e., la réduction $\varepsilon \overset{*}{\rightarrow} \eta$, qui lui est strictement isomorphe, est i.e. □

5.7. Discussion : Le principe de la démonstration de la proposition précédente est, donc, simple. Pour toute expression ε, nous avons associé une expression typée U, telle que l'ensemble $\mathcal{D}(U)$ des expressions dérivables de U soit isomorphe à un sous-ensemble de $\mathcal{D}(\varepsilon)$, sous-ensemble qui a une propriété Church-Rosser. De plus, pour tout ε' tel que $\varepsilon \overset{*}{\rightarrow} \varepsilon'$, on peut construire une expression U, tel que le sous-ensemble de $\mathcal{D}(\varepsilon)$, isomorphe à $\mathcal{D}(U)$, contienne ε'. Et, dans $\mathcal{D}(U)$, toute réduction intérieur d'abord ("innermost") est une réduction i.e. qui "dépasse" ε'. Remarquons bien qu'à une réduction intérieur d'abord dans le λ-calcul typé ne correspond pas une réduction intérieur d'abord dans le λ-calcul non typé.

Il serait, en outre, intéressant de savoir si ce λ-calcul typé a une propriété de normalisation forte ("strong normalization"), car alors toute réduction aboutirait à la forme normale, et l'ordre de l'intérieur vers l'extérieur, considéré dans le problème posé, apparaitrait particulier et la proposition 5.6.2. pourrait se généraliser à des ordres imposés sur les radicaux contractés, plus complexes. En ce domaine, les résultats de Nederpelt [13] peuvent peut-être s'adapter pour donner au calcul typé cette propriété de normalisation forte.

5.7. Réduction de l'intérieur à l'extérieur par rapport à une sous-expression :

5.7.1. Définition : Nous dirons qu'une réduction
$\eta = \eta_0 \overset{R_1}{\rightarrow} \eta_1 \overset{R_2}{\rightarrow} \eta_2 \overset{R_3}{\rightarrow} \dots \overset{R_n}{\rightarrow} \eta_n = \eta'$ est extérieure à une sous-expression ε de η ssi pour tout i ($1 \leq i \leq n$) le radical R_i contracté entre η_{i-1} et η_i ne descend pas d'un radical contenu dans la sous-expression ε de η.

Nous noterons une telle réduction $\eta \overset{*}{\underset{\varepsilon}{\not\rightarrow}} \eta'$ (voir P. Welch [22]).

5.7.2. <u>Proposition</u> : Si η est une expression non typée et si ε est une de sous-expressions, c'est-à-dire $\eta = C[\varepsilon]$ pour un certain contexte $C[\ ]$, et si η' est une expression telle que : $\eta \overset{*}{\to} \eta'$, alors il existe deux expressions ε' et ζ telles que : $\eta' \overset{*}{\to} \zeta$ et $\eta \overset{*}{\to} C[\varepsilon']$ et $C[\varepsilon'] \underset{\varepsilon'}{\overset{*}{\not\to}} \zeta$.

<u>Démonstration</u> : analogue à celle de 5.6.2. Comme $\eta \overset{*}{\to} \eta'$, il existe deux affectations de type V et V', de η et η' telles que : $V \overset{*}{\to} V'$ (voir proposition 5.4.8.). Donc, $V = \Gamma[U]$, où <u>det</u>(U) $= \varepsilon$ et $\Gamma[\ ]$ correspond à $C[\ ]$. Toute réduction intérieur-d'abord dans le calcul typé atteint la forme normale. Considérons une réduction intérieur d'abord, qui contracte en priorité les radicaux à l'intérieur de U. Soit $V = V_0 \overset{R_1}{\to} V_1 \overset{R_2}{\to} V_2 \overset{R_3}{\to} \dots \overset{R_n}{\to} V_n = W$ cette réduction. Nous savons que W est la forme normale de V. D'autre part $V = \Gamma[U]$, $V_1 = \Gamma[U_1]$, $V_2\ \Gamma[U_2]$, ... où $U \overset{R_1}{\to} U_1 \overset{R_2}{\to} U_2 \overset{R_3}{\to}$ ... puisque les radicaux de U sont contractés en priorité. Or U a une forme normale U', qui est atteinte par la réduction $U \overset{R_1}{\to} U_1 \overset{R_2}{\to} U_2 \overset{R_3}{\to}$ ... qui est bien sûr aussi intérieur d'abord. Soit $U_j = U'$. Nous avons alors $V_j \overset{R_{j+1}}{\to} V_{j+1} \overset{R_{j+2}}{\to} \dots \overset{R_n}{\to} V_n = W$ qui est une réduction extérieur à U', c'est-à-dire du style $V_j = \Gamma[U'] \underset{U'}{\overset{*}{\not\to}} W$. En effet, supposons que, pour $i > j$, le radical R_i descend d'un radical interne à U'. Comme U' est en forme normale (typée), ce dernier est donc de degré nul. Donc, d'après 5.5.5., R_i serait aussi de degré nul, ce qui est impossible, car R_i est contracté entre U_{i-1} et U_i, et nous n'avons défini la β-conversion que pour des radicaux de degré non nul. Nous aboutissons donc à une contradiction, et en résumé, il existe V,V',U,U' et W tels que : $V \overset{*}{\to} V'$, $V = \Gamma[U] \overset{*}{\to} \Gamma[U']$, $V' \overset{*}{\to} W$ et $\Gamma[U'] \underset{U'}{\overset{*}{\not\to}} W$, où <u>det</u>(V) $= C[\varepsilon]$; <u>det</u>(U) $= \varepsilon$, <u>det</u>(V') $= \eta'$.

Posons <u>det</u>(U') $= \varepsilon'$, <u>det</u>(W) $= \zeta$. En revenant au calcul non typé, nous avons montré l'existence de ε' et ζ tels que : $C[\varepsilon] \overset{*}{\to} C[\varepsilon']$, $\eta' \overset{*}{\to} \zeta$, et $C[\varepsilon'] \underset{\varepsilon'}{\overset{*}{\not\to}} \zeta$. □

6. $\mathcal{S}$ est une sémantique adéquate.

6.1. $\mathcal{S}$ est une congruence : (suite)

Nous étions restés sur le problème suivant : est-il vrai que pour toute expression ε, et pour tout contexte [ ] nous avons :

$$C[\varepsilon] \subseteq \bigcup_{a \in A(\varepsilon)} C[a] \; ? \; ?$$

6.1.1. Notations :

Soit ε une expression quelconque et $\mathcal{F}$ un ensemble de radicaux de ε, nous noterons $\varepsilon[\mathcal{F}\backslash\Omega]$ la *substitution de la famille de radicaux*, $\mathcal{F}$, par la constante Ω, c'est à dire l'expression obtenue en remplaçant chacun des radicaux de $\mathcal{F}$ par Ω. Remarquons qu'il suffit de substituer les radicaux de $\mathcal{F}$ les plus externes, c'est à dire ceux qui ne sont pas contenus dans un autre radical de $\mathcal{F}$. Pour tout radical **R** de ε, nous pouvons introduire la notion de *descendant* de R dans $\varepsilon[\mathcal{F}\backslash\Omega]$, de la manière immédiate suivante :

1) Si $R \in \mathcal{F}$ ou R contenu dans un radical de $\mathcal{F}$, alors R n'a pas de descendant dans $\varepsilon[\mathcal{F}\backslash\Omega]$

2) Sinon, R a un descendant unique qui est le radical correspondant à R dans $\varepsilon[\mathcal{F}\backslash\Omega]$.

De plus, nous noterons $\varepsilon \overset{*}{\underset{\mathcal{F}}{\not\to}} \varepsilon'$ une réduction de ε à ε', dans laquelle un descendant d'un radical de la famille $\mathcal{F}$ de radicaux de ε ne sera jamais contracté.

6.1.2. Proposition :

Soient ε, ε' deux expressions, $\mathcal{F}$ une famille de radicaux de ε et R un radical de ε n'appartenant pas à la famille $\mathcal{F}$. Si $\varepsilon \overset{R}{\to} \varepsilon'$ et si $\mathcal{F}'$ est la famille de radicaux de ε', descendants des radicaux de $\mathcal{F}$, alors :

1) Si R a un descendant R' dans $\varepsilon[\mathcal{F}\backslash\Omega]$, on a

$$\varepsilon[\mathcal{F}\backslash\Omega] \overset{R'}{\to} \varepsilon'[\mathcal{F}'\backslash\Omega]$$

2) Sinon $\quad \varepsilon[\mathcal{F}\backslash\Omega] = \varepsilon'[\mathcal{F}'\backslash\Omega]$

Démonstration : par récurrence sur la taille de $\varepsilon, ||\varepsilon||$.

Cas 1 : $\varepsilon = x$. Ce cas est impossible, car ε ne contient pas de radical.

Cas 2 : $\varepsilon = \lambda x.\varepsilon_1$. Alors R est contenu dans ε_1 et $\varepsilon' = \lambda x.\varepsilon'_1$ où $\varepsilon_1 \overset{R}{\rightarrow} \varepsilon'_1$. Or $||\varepsilon_1||<||\varepsilon||$ et la récurrence nous donne immédiatement le résultat désiré.

Cas 3 : $\varepsilon = \varepsilon_1\varepsilon_2$ et $\varepsilon \neq R$ et $\varepsilon \notin F$. Dans ce cas R est contenu, soit dans ε_1, soit dans ε_2. Supposons R dans ε_1, l'autre cas étant absolument symétrique. Nous avons donc $\varepsilon' = \varepsilon'_1\varepsilon_2$ où $\varepsilon_1 \overset{R}{\rightarrow} \varepsilon'_1$.

Soient F_1 et F_2, les sous-ensembles disjoints de F des radicaux de F contenus dans ε_1 et ε_2. On a $\varepsilon[F\backslash\Omega] = \varepsilon_1[F_1\backslash\Omega]\,\varepsilon_2[F_2\backslash\Omega]$. Si R n'a pas de descendant dans $\varepsilon_1[F_1\backslash\Omega]$, comme $||\varepsilon_1||<||\varepsilon||$, par récurrence on a :

$$\varepsilon_1[F_1\backslash\Omega] = \varepsilon'_1[F'_1\backslash\Omega]$$

Si F'_1 est la famille de descendants dans ε'_1 de radicaux de F_1. Donc :

$$\varepsilon'[F'\backslash\Omega] = \varepsilon'_1[F'_1\backslash\Omega]\,\varepsilon_2[F_2\backslash\Omega]$$

$$= \varepsilon_1[F_1\backslash\Omega]\,\varepsilon_2[F_2\backslash\Omega] = \varepsilon[F\backslash\Omega]$$

Si R a un descendant R' dans $\varepsilon_1[F_1\backslash\Omega]$, on a par récurrence : $\varepsilon_1[F_1\backslash\Omega] \overset{R'}{\rightarrow} \varepsilon'_1[F'_1\backslash\Omega]$ et un raisonnement analogue au précédent nous donne : $\varepsilon[F\backslash\Omega] \overset{R'}{\rightarrow} \varepsilon'[F'\backslash\Omega]$.

Cas 4 : $\varepsilon = (\lambda x.M)N \in F$. Alors, R est contenu dans un radical ε de F et, par conséquent, le radical R n'a pas de descendant dans $\varepsilon[F\backslash\Omega]$. Or, comme $\varepsilon \in F$, $\varepsilon[F\backslash\Omega] = \Omega$ et, comme R est contenu dans ε, c'est à dire soit dans M, soit dans N, ε' est de la forme : $\varepsilon' = (\lambda x.M')N'$ où ε' est le descendant de ε dans ε'. Donc, $\varepsilon' \in F'$ et $\varepsilon'[F'\backslash\Omega] = \Omega = \varepsilon[F\backslash\Omega]$.

Cas 5 : $\varepsilon = R\,(\lambda x.M)N$. Comme $R \notin F$, la famille F se subdivise en deux classes disjointes F_M et F_N, des radicaux de F contenus dans M et N. On a donc :

$$\varepsilon[F\backslash\Omega] = R' \quad \text{où} \quad R' = (\lambda x.M[F_M\backslash\Omega])(N[F_N\backslash\Omega])$$

De plus, comme $\varepsilon \overset{R}{\rightarrow} \varepsilon'$, $\varepsilon' = M[\mathbf{x}\backslash N]$. La famille F', des descendants de F dans ε', se subdivise aussi en deux classes F'_M et F'_N, des descendants de F_M et F_N.

Et, il est clair, par une récurrence sur $||M||$, que :

$$\begin{aligned} \varepsilon' [\ \mathcal{F}'\backslash\Omega\ ] &= M [\ x\backslash N\ ] [\mathcal{F}'_M\backslash\Omega\ ] [\ \mathcal{F}'_N\backslash\Omega\ ] \\ &= M [\ \mathcal{F}_M\backslash\Omega\ ] [\ x\backslash N [\ \mathcal{F}_N\backslash\Omega\ ]] \end{aligned}$$

C'est à dire : $\varepsilon [\ \mathcal{F}\backslash\Omega\ ] \overset{R'}{\rightarrow} \varepsilon' [\ \mathcal{F}'\backslash\Omega\ ]$. □

Nous nous servirons fréquemment, au chapitre suivant de cette proposition qui indique donc une certaine commutation entre la β-conversion et la substitution d'une famille de radicaux par la constante Ω.

6.1.3. <u>Proposition</u> : Soient $\varepsilon, \varepsilon'$ deux expressions et $\mathcal{F}$ une famille de radicaux de ε. Si $\varepsilon \overset{*}{\underset{\mathcal{F}}{\not\rightarrow}} \varepsilon'$, et si $\mathcal{F}'$ est la famille de radicaux, de ε', descendants des radicaux de $\mathcal{F}$ dans ε', alors on a :

$$\varepsilon [\ \mathcal{F}\backslash\Omega\ ] \rightarrow \varepsilon'[\ \mathcal{F}'\backslash\Omega\ ]$$

<u>Démonstration</u> : par récurrence sur la longueur ℓ de la réduction $\varepsilon \overset{*}{\rightarrow} \varepsilon$.

1) Si $\ell = o$, alors $\varepsilon = \varepsilon'$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$ et , donc , $\varepsilon[\ \mathcal{F}\backslash\Omega\ ] = \varepsilon'[\ \mathcal{F}'\backslash\Omega\ ]$.

2) Si $\ell > o$, soit R le radical de ε contracté au cours du premier pas de la réduction $\varepsilon \overset{*}{\rightarrow} \varepsilon'$ et soit ε_1 l'expression obtenue par contradiction de R. On a , donc, $\varepsilon \overset{R}{\rightarrow} \varepsilon_1$, et $\varepsilon_1 \overset{*}{\rightarrow} \varepsilon'$. Soit $\mathcal{F}_1$ la famille des radicaux descendants des radicaux de $\mathcal{F}$ dans ε_1. Nous avons $\varepsilon \overset{*}{\underset{\mathcal{F}_1}{\not\rightarrow}} \varepsilon'$. En effet, si un descendant d'un radical de $\mathcal{F}_1$ est contracté de ε_1 à ε', ce radical contracté sera aussi un descendant d'un radical de $\mathcal{F}$, ce qui contredit l'hypothèse $\varepsilon \overset{*}{\underset{\mathcal{F}}{\not\rightarrow}} \varepsilon'$. Donc par récurrence, nous avons $\varepsilon [\ \mathcal{F}_1\backslash\Omega\ ] \overset{*}{\rightarrow} \varepsilon'[\ \mathcal{F}'\backslash\Omega\ ]$, car les descendants des radicaux de $\mathcal{F}_1$ dans ε' sont bien entendu, les mêmes que les descendants des radicaux de $\mathcal{F}$ dans ε'. Or, R n'est pas dans la famille $\mathcal{F}$, puisque $\varepsilon \overset{*}{\underset{\mathcal{F}}{\not\rightarrow}} \varepsilon'$ et,par la proposition précédente, nous savons qu'alors : $\varepsilon [\ \mathcal{F}\backslash\Omega\ ] \overset{*}{\rightarrow} \varepsilon_1 [\ \mathcal{F}_1\backslash\Omega\ ]$. Il existe, donc, une réduction $\varepsilon [\ \mathcal{F}\backslash\Omega\ ] \overset{*}{\rightarrow} \varepsilon' [\ \mathcal{F}'\backslash\Omega\ ]$. □

6.1.4. Proposition : Si ε est une expression, et C[ ] un contexte, on a :

$$C\,[\varepsilon] \sqsubseteq \bigsqcup_{a \,\in\, A(\varepsilon)} C\,[a]$$

Démonstration : Il suffit de montrer, que si η est tel que $C\,[\varepsilon] \overset{*}{\rightarrow} \eta$, alors il existe un a dans $A(\varepsilon)$ tel que : $\phi\eta <$ [a]. La proposition 5.7.2. nous signale l'existence d'une expression ε',η', telle que $\varepsilon \overset{*}{\rightarrow} \varepsilon'$, $\eta \overset{*}{\rightarrow} \eta'$ et $C\,[\varepsilon'] \underset{\varepsilon'}{\overset{*}{\not\rightarrow}} > \eta'$. Soit $\psi(\varepsilon')$, l'expression obtenue en substituant toute la famille F des radicaux contenus dans ε' par Ω. Comme la réduction de $C[\varepsilon']$ à η' ne contracte jamais un descendant d'un radical interne à ε', c'est à dire un descendant d'un radical de la famille F, si F' est la famille des descendants dans η' des radicaux de F, nous avons, en appliquant la proposition précédente, $C\,[\varepsilon'][\,F\backslash\Omega\,] \overset{*}{\rightarrow} \eta'[\,F'\backslash\Omega\,]$ Notons $\eta'' = \eta'[\,F'\backslash\Omega\,]$. Comme $C\,[\,\psi(\varepsilon')\,] = C\,[\varepsilon][\,F\backslash\Omega\,]$, nous avons $C\,[\,\psi(\varepsilon')\,] \overset{*}{\rightarrow} \eta''$. Or, la famille F' est un sous-ensemble de tous les radicaux de η! On a donc, $\phi\eta' = \phi(\,\eta'[\,F'\backslash\Omega\,]) = \phi\eta''$. Si bien que, comme $\eta \overset{*}{\rightarrow} \eta'$, $\phi\eta < \phi\eta' = \phi\eta''$. Pour tout η dérivable de $C\,[\varepsilon]$, il existe donc ε' et η'' tels que $\varepsilon \overset{*}{\rightarrow} \varepsilon'$ et $C\,[\,\psi(\varepsilon')\,] \overset{*}{\rightarrow} \eta''$ et $\phi\eta < \phi\eta''$. Donc, d'après la définition de la relation $\sqsubseteq$, $\phi\eta \sqsubseteq C\,[\psi(\varepsilon')]$. Or, $\psi(\varepsilon') \underset{\omega}{\overset{*}{\rightarrow}} \phi\varepsilon'$, donc $C\,[\psi(\varepsilon')] \equiv C[\,\phi\varepsilon']$. Donc, pour tout η dérivable de $C\,[\varepsilon]$, il existe a, approximant de ε, tel que : $\phi\eta \sqsubseteq C[a]$. D'où, comme $C\,[\varepsilon] \equiv \bigsqcup_{\eta \,\in\, \mathcal{D}(C[\varepsilon])} \phi\eta$, on a : $C\,[\varepsilon] \sqsubseteq \bigsqcup_{a \,\in\, A(\varepsilon)} C[a]$. □

6.1.5. Théorème 1 : Si ε, ε' sont deux expressions telles que $\varepsilon \sqsubseteq \varepsilon'$, alors, pour tout contexte C [ ], on a $C\,[\varepsilon] \sqsubseteq C\,[\varepsilon']$.

Démonstration : Application de la proposition précédente et de 4.3.5. □

III - Réductions sûres

Dans ce chapître, nous généraliserons un résultat de Vuillemin [19], pour le λ-calcul. Nous nous efforcerons de caractériser les "bonnes" réductions d'une expression donnée, en introduisant la notion de réduction sûre.

1) Bonnes réductions - Réductions sûres :

1.1. Réductions parallèles :

Nous avons déjà donné un sens à cette notion, au chapître précédent, dans la démonstration de la propriété Church-Rosser du calcul typé. De plus, nous avons supposé l'existence d'une notion analogue pour le λ-calcul ordinaire. Au lieu d'adopter une telle définition formelle, nous préférerons une vision plus dynamique.

1.1.1. Réduction complète d'une famille de radicaux :

Une réduction $\varepsilon = \varepsilon_0 \xrightarrow{R_1} \varepsilon_1 \xrightarrow{R_2} \varepsilon_2 \rightarrow \dots \xrightarrow{R_n} \varepsilon_n = \varepsilon'$ est une *réduction complète d'une famille F de radicaux* de ε ssi chacun des radicaux R_i contractés au cours de cette réduction est un descendant d'un radical de F et si, dans ε', il n'existe plus aucun descendant de F. (Voir Church [4] et Curry [7]).

1.1.2. Lemme des déplacements parallèles :(Curry [7])

Si F est une famille de radicaux de ε, il existe une réduction complète de F, et toutes les réductions complètes de F se terminent sur une même expression ε'. De plus (Morris [ ]), toutes les sous-expression de ε' ont les mêmes ancêtres dans ε, quelque soit la réduction adoptée.

Ce lemme n'est plus vrai si on considère la η-réduction, mais sert à une démonstration du théorème de Church-Rosser, différente de celle que nous avons adoptée au chapître précédent, pour la β-réduction.

1.1.3. Réduction parallèle (définition) : Toute réduction complète d'une famille F de radicaux d'une expression ε sera encore appelée *réduction parallèle* de F. Nous noterons $\varepsilon \xrightarrow{F} \varepsilon'$, si ε' est l'expression obtenue. Une réduction constituée de plusieurs pas élémentaires de réductions parallèles, sera aussi appelée réduction parallèle, et nous parlerons de pas de réduction parallèle chaque fois qu'il y aura ambiguité. Les réductions, dont il était question auparavant, où chaque pas élémentaire est constitué de la contraction d'un seul radical, seront appelées *réductions séquentielles*. De plus, *dorénavant*, chaque fois qu'il sera question de réductions, il faudra comprendre réductions parallèles.

Remarquons que les réductions séquentielles sont un cas particulier des réductions parallèles, et qu'à toute réduction parallèle, on peut faire correspondre une réduction séquentielle équivalente (d'après le lemme des déplacements parallèles).

1.1.4 Proposition : Si $\varepsilon \xrightarrow{F_1} \varepsilon'$ et si $\varepsilon \xrightarrow{F_2} \varepsilon''$, alors il existe η tel que $\varepsilon' \xrightarrow{F'_2} \eta$ et $\varepsilon'' \xrightarrow{F'_1} \eta$, où $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$ sont des expressions quelconques, F_1 et F_2 deux familles arbitraires de radicaux de ε et F'_1 et F'_2 leurs descendants dans ε'' et ε'.

Démonstration : Immédiate d'après le lemme des déplacements parallèles.

Posons $F = F_1 \cup F_2$. Les réductions $\varepsilon \xrightarrow{F_1} \varepsilon' \xrightarrow{F'_2} \eta_1$ et $\varepsilon \xrightarrow{F_2} \varepsilon'' \xrightarrow{F'_1} \eta_2$ sont des réductions complètes de F. Donc, par application du lemme 1.1.2., $\eta_1 = \eta_2 = \eta$. □

Remarquons que F'_1 ou F'_2 peut être vide, auquel cas ε'' ou ε' est confondu avec η.

1.2. Bonnes réductions (définition) : A toute réduction :

$$(1) \qquad \varepsilon = \varepsilon_0 \xrightarrow{F_1} \varepsilon_1 \xrightarrow{F_2} \varepsilon_2 \xrightarrow{F_3} \cdots \xrightarrow{F_n} \varepsilon_n \xrightarrow{F_{n+1}} \cdots$$

finie ou infinie, correspond une chaine croissante de N:

$$\phi\varepsilon = \phi\varepsilon_0 < \phi\varepsilon_1 < \phi\varepsilon_2 < \dots < \phi\varepsilon_n < \dots$$

finie ou infinie, qui a donc une limite dans $\bar{N}$.

Nous appelerons *valeur obtenue* par cette réduction la quantité $\bigsqcup_{n=0}^{\infty} S(\phi\varepsilon_n)$, notée encore selon les conventions du § 4 du chapître précédent, $\bigsqcup_{n=0}^{\infty} \phi\varepsilon_n$.

Définition : La réduction (1) sera dite *bonne* ssi on a $\varepsilon \equiv \bigsqcup_{n=0} \phi\varepsilon_n$.

Autrement dit, la valeur obtenue par une bonne réduction est le maximum d'information (éventuellement infini) que contient ε. Une bonne réduction atteint donc la β-forme normale, si elle existe. Par exemple, si nous posons $Y_f = (\lambda x.\ f(xx))\ (\lambda x.\ f(xx))$, $I = (\lambda x.x)$, $\Delta =\ x.xx$ et $K = \lambda x.\lambda y.x$, les réductions :

$IY_f \to I(fY_f) \to I(f(fY_f)) \to \dots I(f^nY_f) \to \dots,$

$I(K(Ix)(\Delta\Delta)) \to I(Kx(\underline{\Delta\Delta})) \to I(Kx(\underline{\Delta\Delta})) \to \dots$

ne sont pas bonnes. Mais les réduction suivantes :

$IY_f \to Y_f \to fY_f \to f(fY_f) \to \dots \to f^nY_f \to \dots$

$I(\underline{\Delta\Delta}) \to I(\underline{\Delta\Delta}) \to I(\underline{\Delta\Delta}) \to \dots ,$

$I(K(Ix)(\Delta\Delta)) \to I(Kx(\Delta\Delta)) \to Ix \to x,$

sont bonnes. (Nous avons soulignés les radicaux contractés, lorsqu'il y a ambiguité).

1.3. Réductions sûres :

Définitions : Un pas élémentaire de réduction parallèle $\varepsilon \overset{F}{\to} \varepsilon'$,est *sûr* ssi on a la relation : $\varepsilon[F\backslash\Omega] \equiv \phi\varepsilon$

Cette définition n'est que la transcription pour λ-calcul de la définition qui se trouve dans Vuillemin [19] (safe computation rules).

Intuitivement, une réduction parallèle est sûre si la famille F des radicaux contractés est cruciale pour augmenter l'information de l'expression ε qui la contient. En effet, remplacer tous les radicaux de F par la valeur Ω (indéfinie) revient à substituer tous les radicaux de ε par Ω. Et la réduction de radicaux , qui ne sont pas de F, ne permettra pas de gagner de l'information. En fait, seulement certains radicaux de F peuvent être cruciaux.

<u>Définition</u> : Une famille F de radicaux d'une expression ε est <u>*cruciale*</u> ssi $\varepsilon \overset{F}{\to} \varepsilon'$ est une réduction sûre.

<u>Exemples</u> : Si $\Delta = \lambda x.xx$, $I = \lambda x.x$, $K = \lambda xy.x$,

1) Si $\varepsilon = x\ (\Delta\Delta)(\underline{Ix})$ alors $F = \{ Ix \}$ est cruciale.
En effet, $\phi\varepsilon = x\Omega\Omega$ et comme $\Delta\Delta \equiv \Omega$, on a :
$\varepsilon [F\backslash\Omega] = x(\Delta\Delta)\ \Omega \equiv x\Omega\Omega$, d'après le théorème 1. Et, donc,
$\varepsilon [F\backslash\Omega] \equiv \phi\varepsilon$.

2) Si $\varepsilon = (\lambda xy.xy)\ K\ (\underline{Ix})$, alors $F = \{ Ix \}$ est cruciale.
En effet, $\phi\varepsilon = \Omega$. D'autre part,

$$\varepsilon [F\backslash\Omega] = (\lambda xy.xy)\ K\Omega \overset{*}{\underset{\beta}{\to}} K\Omega \underset{\beta}{\to} \lambda x.\Omega \underset{\omega}{\to} \Omega$$

Comme les ω-β-règles de conversion sont valides, on a :
$\varepsilon [F\backslash\Omega] \equiv \Omega = \phi\varepsilon$.

3) Si $\varepsilon = x\ (\underline{Kx})\ (\underline{Ix}))$ alors $F = \{ Kx, Ix \}$ est cruciale.
On a : $\phi\varepsilon = x\Omega\Omega$ et $\varepsilon [F\backslash\Omega] \overset{*}{\to} x\Omega\Omega$.

<u>Définition</u> : Une réduction est sûre ssi chacun de ses pas élémentaires est sûr.

2) Toute réduction sûre est bonne :

2.1. Définition :

Nous appelerons *distance de* ε *à sa f.n.g.* (forme normale à gauche) le nombre de pas que met la réduction normale à partir de ε pour obtenir une f.n.g. Nous noterons cette quantité *dist* (ε).

Si ε n'a pas de f.n.g., cette notion n'est donc pas définie. Mais, si ε a une f.n.g., le corollaire de la proposition 2.4. du chapître I nous indique que la réduction normale, qui contracte systématiquement le radical de tête, atteint une f.n.g. Donc, si ε a une f.n.g., *dist* (ε) est bien défini.

2.2. Lemme 1 :

Si ε n'est pas en f.n.g. et si F est une famille de radicaux de ε qui ne contient pas le radical de tête H de ε, alors si $\varepsilon \xrightarrow{F} \varepsilon'$, le radical H n'a qu'un descendant unique H' dans ε' qui est le radical de tête de ε'.

Démonstration :

Comme ε n'est pas en f.n.g., ε est de la forme :

$$\varepsilon = \lambda x_1 x_2 \dots x_m . (\lambda x.M)N \, \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n$$

et le radical de tête de ε, H , n'étant pas dans F, la famille F se subdivise en n+2 partitions disjointes dans $M, N, \varepsilon_1, \dots \varepsilon_n$. Donc ε' s'écrit :

$$\varepsilon' = \lambda x_1 x_2 \dots x_m . (\lambda x.M')N' \varepsilon'_1 \varepsilon'_2 \dots \varepsilon'_n$$

et H a un descendant unique dans ε', H' = (λx.M')N' qui est le radical de tête de ε'. $\square$

2.3. Lemme 2 :

Si ε a une f.n.g. et si $\varepsilon \to \eta$, alors *dist*$(\eta) \leq$ *dist*(ε).

Démonstration : par récurrence sur $\underline{dist}(\varepsilon)$.

1) si $\underline{dist}(\varepsilon) = 0$, alors ε est en f.n.g. et si $\varepsilon \to \eta$, alors η est également en f.n.g., c'est à dire $\underline{dist}(\eta)= 0$.

2) Si $\underline{dist}(\varepsilon) = n > 0$, alors ε n'est pas en f.n.g. et contient donc un radical de tête H. Soit ε', l'expression obtenue par contraction de H. Alors $\varepsilon \xrightarrow{H} \varepsilon'$ et $\underline{dist}(\varepsilon') = n-1$. Soit F la famille de radicaux contractés entre ε et η. On a $\varepsilon \xrightarrow{F} \eta$. Deux cas se présentent :

Cas 1 : Si H est un des radicaux de F, H n'a pas de descendant dans η et, d'après la proposition 1.1.4., si F' est la famille des descendants de F dans ε', on a : $\varepsilon' \xrightarrow{F'} \eta$. Or $\underline{dist}(\varepsilon') = n-1$ et, par récurrence, nous savons que: $\underline{dist}(\eta) \leq \underline{dist}(\varepsilon') = n-1 < n = \underline{dist}(\varepsilon)$.

Cas 2 : Si H n'est pas un radical de F, soient H' et F' les descendants de H et de F dans η et ε'. (d'après le lemme 1, nous savons que H' est unique et est le radical de tête de η). D'après la proposition 1.1.4, il existe η' tel que : $\eta \xrightarrow{H'} \eta'$ et $\varepsilon' \xrightarrow{F'} \eta'$. Or, comme H est le radical de tête de ε, $\underline{dist}(\varepsilon') = n-1$, par récurrence comme $\varepsilon' \xrightarrow{F'} \eta'$, on a : $\underline{dist}(\eta') \leq n-1$. Comme H' est le radical de tête de η, on a : $\underline{dist}(\eta) = 1 + \underline{dist}(\eta')$ et, donc, $\underline{dist}(\eta) \leq n$. □

2.4. Lemme 3 :

Si ε n'est pas en f.n.g., toute famille F de radicaux de ε, contenant le radical de tête H de ε, est cruciale.

Démonstration : l'expression ε est de la forme :

$$\varepsilon = \lambda x_1 x_2 \ldots x_m.\ (\lambda x.M)N\ \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n$$

avec un radical de tête H = $(\lambda x.M)N$.

Or, on a :

$$\varepsilon\ [\ \{H\}\backslash\Omega\ ] = \lambda x_1 x_2 \ldots x_m.\ \Omega\varepsilon_1\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n \overset{*}{\underset{\omega}{\rightarrow}} \Omega$$

Comme les ω-règles de conversion sont valides, nous avons :

$$\varepsilon\ [\ \{H\}\ \Omega\ ] \equiv \Omega = \phi\varepsilon$$

Si $H \in F$, d'après la proposition du chapitre précédent on a :

$$\phi\varepsilon \subseteq \varepsilon\ [\ F\backslash\Omega\ ] \subseteq \varepsilon\ [\ \{H\}\backslash\Omega\ ] = \phi\varepsilon$$

Donc la famille F est cruciale. □

2.5. Lemme 4 :

Si ε a une f.n.g, de variable de tête différente de Ω , si $\varepsilon \overset{F}{\rightarrow} \varepsilon'$ et si *dist*(ε) = 1, les deux clauses suivantes sont équivalentes :

a) $\varepsilon \overset{F}{\rightarrow} \varepsilon'$ est une réduction sûre

b) *dist*(ε') < *dist*(ε)

Démonstration :

Comme *dist*(ε) = 1, l'expression h obtenue par contraction du radical de tête H de ε est en f.n.g. . On a donc : $\varepsilon \overset{H}{\rightarrow} h$. Comme $\varepsilon \overset{F}{\rightarrow} \varepsilon'$, le lemme 2 nous montre que : *dist*(ε') ≤ 1. Il n'y a donc que deux valeurs possibles pour *dist*(ε') : 0 ou 1. Et ces deux cas sont équivalents à ε' est en f.n.g. ou non, ou encore $H \in F$ ou $H \notin F$, d'après le lemme 1. Il reste donc, à montrer que $H \in F$ est équivalent au fait que la réduciton $\varepsilon \overset{F}{\rightarrow} \varepsilon'$ soit sûre.

1) Si $H \in F$, la réduction $\varepsilon \overset{F}{\rightarrow} \varepsilon'$ est sûre, d'après le lemme 4.

2) Si $H \notin F$, d'après la proposition du chapître précédent, on a : $\varepsilon\ [\ F\backslash\Omega\ ] \overset{H'}{\rightarrow} \varepsilon'\ [\ F'\backslash\Omega\ ]$ où H' et F' sont les descendants de H et de F dans les expression $\varepsilon\ [\ F\backslash\Omega\ ]$ et ε'. D'autre part, par un raisonnement analogue à celui du lemme 1, il est clair que $\varepsilon\ [\ F\backslash\Omega\ ]$ n'est pas en f.n.g. et H' est son radical de tête. Comme *dist*(ε) = 1, l'expression ε' est en f.n.g. et de

variable de tête différente de Ω (par hypothèse + proposition du chapître I). Donc $\varepsilon'[\ F'\backslash\Omega\ ]$ est en f.n.g. et de variable de tête différente de Ω, c'est à dire $\varepsilon'[\ F'\backslash\Omega\ ] \not\equiv \Omega$.
Or comme $\varepsilon\ [\ F\backslash\Omega\ ] \overset{H'}{\rightarrow} \varepsilon'[\ F'\backslash\Omega\ ]$, on a :

$$\varepsilon\ [\ F\backslash\Omega\ ] \equiv \varepsilon'[\ F'\backslash\Omega\ ]$$

Supposons que la famille F est cruciale, on a :

$$\phi\varepsilon \equiv \varepsilon\ [\ F\backslash\Omega\ ]$$

et, comme $\underline{dist}(\varepsilon) = 1$, on a : $\phi\varepsilon = \Omega$. En résumé :

$$\Omega = \phi\varepsilon \equiv \varepsilon\ [\ F\backslash\Omega\ ] \equiv \varepsilon'[\ F'\backslash\Omega\ ] \not\equiv \Omega.$$

On aboutit à une contradiction. Et donc si $H \notin F$, la réduction $\varepsilon \overset{F}{\rightarrow} \varepsilon'$ n'est pas sûre . □

2.6. Lemme 5 :

Si R et F sont respectivement, un radical et une famille de radicaux d'une expression ε tels que $R \notin F$, si $\varepsilon \overset{R}{\rightarrow} \varepsilon'$ et si $\phi\varepsilon = \phi\varepsilon'$, alors si F' est la famille de descendants de F dans ε', les deux clauses suivantes sont équivalentes :

a) F est cruciale

b) F' est cruciale

Démonstration :

Comme $R \notin F$, selon que R ait un descendant R' ou non dans $\varepsilon\ [\ F\backslash\Omega\ ]$, nous avons $\varepsilon\ [\ F\backslash\Omega\ ] \overset{R'}{\rightarrow} \varepsilon'[\ F'\backslash\Omega\ ]$ ou

$\varepsilon\ [\ F\backslash\Omega\ ] = \varepsilon'\ [\ F'\backslash\Omega\ ]$, par la proposition 6.1.2. du chapître prédécent. Donc, comme la β-réduction est valide, on a :

$$\varepsilon\ [\ F\backslash\Omega\ ] \equiv \varepsilon'[\ F'\backslash\Omega\ ]$$

D'autre part, par hypothèse, nous avons :

$$\phi\varepsilon = \phi\varepsilon'$$

Donc F est cruciale (c'est à dire $\varepsilon\ [\ F\backslash\Omega\ ] \equiv \phi\varepsilon$) si et seulement si F' est cruciale (c'est à dire $\varepsilon'[\ F'\backslash\Omega\ ] \equiv \phi\varepsilon'$). □

2.7. Lemme 6 :

Si ε a une f.n.g. de variable de tête différente de Ω et si ε n'est pas en f.n.g., la réduction $\varepsilon \overset{F}{\to} \varepsilon'$ est sûre si et seulement si $\underline{dist}(\varepsilon') < \underline{dist}(\varepsilon)$.

Démonstration : par récurrence sur $\underline{dist}$ (ε).

1) Si $\underline{dist}(\varepsilon) = 1$, le lemme 4 nous donne la réponse.

2) Si $\underline{dist}(\varepsilon) = n$ où $n > 1$. Deux cas se présentent, selon que le radical de tête H de ε soit dans la famille F ou non :

Cas 1 : Si $H \in F$, alors par le lemme 3, la réduction $\varepsilon \overset{F}{\to} \varepsilon'$ est sûre. Soit ε l'expression telle que $\varepsilon \overset{H}{\to} \eta$. Par la proposition 1.1.4. , on a : $\eta \overset{F'}{\to} \varepsilon'$ où F' est la famille des descendants de F dans η. Donc, par le lemme 2, $\underline{dist}(\varepsilon') \leq \underline{dist}(\eta)$ et comme, par définition, $\underline{dist}(\eta) = n-1$ et donc:$\underline{dist}(\varepsilon') < n$

Cas 2 : Si $H \notin F$, soit η l'expression telle que $\varepsilon \overset{H}{\to} \eta$.
Comme nous sommes dans le cas où $\underline{dist}(\varepsilon) \geq 2$, on a :
$\phi\varepsilon = \phi\eta = \Omega$. Donc, si F' est la famille des descendants de F dans η, le lemme 5 nous indique que F est cruciale si et seulement si F' est cruciale. Soit η' l'expression telle que $\varepsilon' \overset{F'}{\to} \eta'$. Par récurrence, nous avons F' cruciale si et seulement si $\underline{dist}(\eta') < \underline{dist}(\eta) = n-1$, par définition de la distance. Or, par le lemme 1 et la proposition 1.1.4. , le radical H n'a qu'un descendant unique H' dans ε', qui est le radical de tête de ε'. Et, par conséquent, $\underline{dist}(\varepsilon') = \underline{dist}(\eta') + 1$. Et, comme F est cruciale si et seulement si $\underline{dist}(\eta') < n-1$, la famille F est cruciale si et seulement si $\underline{dist}(\varepsilon') < n$. $\square$

2.8. Proposition :

Si ε a une f.n.g. de variable de tête différente de Ω, alors toute réduction sûre issue de ε atteint une f.n.g.

Démonstration :

Immédiate d'après le lemme précédent, car à chaque pas élémentaire de réduction sûre la distance à une f.n.g. décroit. □

2.9. **Théorème 2** :

Soient ε et η deux expressions telles que $\varepsilon \overset{*}{\rightarrow} \eta$ et soit une réduction sûre infinie :

(1) $\eta = \eta_0 \overset{F_0}{\rightarrow} \eta_1 \overset{F_1}{\rightarrow} \eta_2 \overset{F_2}{\rightarrow} \dots \xrightarrow{F_{p-1}} \eta_p \overset{F_p}{\rightarrow} \dots$

alors, on a :

$$\varepsilon \equiv \bigsqcup_{p=0}^{\infty} \phi\eta_p .$$

Démonstration :

Identique à celle qui se trouve dans Vuillemin [19]. On a bien sûr : $\bigsqcup_{p=0}^{\infty} \phi\eta_p \subseteq \varepsilon$. Montrons donc, que : $\varepsilon \subseteq \bigsqcup_{p=0}^{\infty} \phi\eta_p$ c'est à dire que, pour tout a, approximant de ε, il existe un entier q fini tel que : $a < \phi\eta_q$.

Considérons la suite des approximants m_p, définis par : $m_p = \mathrm{Min}\ (a, \phi\eta_p)$. (Voir la définition de Min au § 1 du chapître II). Comme $\eta_p \rightarrow \eta_{p+1}$ pour tout p, on a $\phi\eta_p < \phi\eta_{p+1}$, c'est à dire $m_p < m_{p+1}$, puisque la fonction Min est bien sûr monotone. Or, l'ensemble des minorants de a est fini dans $A(\varepsilon)$. Donc, comme $m_p < a$ pour tout p, la suite croissante $\{ m_p \}$ a une limite M, inférieure à a et atteinte pour un entier q fini. Par conséquent, on a : $M < a$ et $M = m_q = m_p$ pour tout p tel que $p \geq q$.

Montrons que $a < \phi\eta_q$, c'est à dire $a = M$, par récurrence sur la taille de M, $||M||$.

1) Si $||M|| = 0$, c'est à dire $M = \Omega$, nous avons deux cas :

<u>Cas 1</u> :

Si $a = \Omega$, alors $M = Min (\Omega, \phi\eta_q) = \Omega = a$, par définition de la fonction Min.

<u>Cas 2</u> :

Si $a \neq \Omega$, alors ε a une f.n.g. de variable de tête différente de Ω, et donc η aussi puisque $\varepsilon \overset{*}{\to} \eta$. En effet, <u>*dist*</u>$(\eta) \leq$ <u>*dist*</u>(ε) et par la proposition du chapître I, les f.n.g. sur lesquelles η se dérivent sont équivalentes à celles dérivées de ε. Comme $M = \Omega$, on a pour tout p : $Min (a,\phi\eta_p) = \Omega$, c'est à dire, comme $a \neq \Omega$, $\phi\eta_p = \Omega$ pour tout p. Autrement dit, η est une expression qui a une f.n.g. de variable de tête différente de Ω et la réduction (1) sûre issue de η n'atteint jamais une f.n.g. La proposition précédente nous démontre le contraire. Nous avons donc une contradiction et ce cas est donc impossible.

2) Si $||M|| > 0$, nous avons donc, M de la forme :

$$M = \lambda x_1 x_2 \ldots x_m . x M_1 M_2 \ldots M_n$$

où $x \neq \Omega$. Et, comme $M = Min (a,\phi\eta_p)$ pour tout $p \geq q$, les expression a et η_p, pour $p \geq q$, sont de la forme :

$$a = \lambda x_1 x_2 \ldots x_m . x a_1 a_2 \ldots a_n$$

$$\eta_p = \lambda x_1 x_2 \ldots x_m . x\ \eta_p^1 \eta_p^2 \ldots \eta_p^n$$

pour tout p, tel que $p \geq q$. En outre, pour tout i tel que $1 \leq i \leq n$, on a : $M_i = Min (a_i, \eta_p^i)$.

Or, pout tout p tel que $p \geq q$, la famille F_p de radicaux de η_p se subdivise en n classes disjointes F_p^i de radicaux de F_p internes à η_p^i. Donc, pour tout p tel que $p \geq q$, on a $\eta_p^i \overset{F_p^i}{\to} \eta_{p+1}^i$. De plus, nous avons :

$$\eta_p [F_p\backslash\Omega] = \lambda x_1x_2 \dots x_m.x (\eta_p^1[F_p^1\backslash\Omega]) \dots (\eta_p^n[F_p^n\backslash\Omega])$$

Et comme la famille F_p est cruciale, on a, par définition :

$$\eta_p [F_p\backslash\Omega] \equiv \phi\eta_p = \lambda x_1x_2 \dots x_m.x(\phi\eta_p^1) \dots(\phi\eta_p^n).$$

Donc il est clair que pour tout i, nous avons :

$$\eta_p^i [F_p^i\backslash\Omega] \equiv \phi\eta_p^i$$

Autrement dit, la famille F_p^i est une famille cruciale de radicaux de η_p^i. Et, la réduction :

(i) $\eta_q^i \xrightarrow{F_q^i} \eta_{q+1}^i \xrightarrow{F_{q+1}^i} \eta_{q+2}^i \xrightarrow{F_{q+2}^i} \dots$

est une réduction infinie sûre.

Or, comme $M \neq \Omega$, ε a donc un approximant différent de Ω et, par conséquent, une f.n.g.. D'après la proposition 2.4 du chapître I, ε a une f.n.g. minimale ε_g de la forme :

$$\varepsilon_g = \lambda x_1x_2 \dots x_m.x\ \varepsilon_1\varepsilon_2 \dots \varepsilon_n$$

et telle que : $\varepsilon_g \overset{*}{\to} \eta_q$. D'où, comme les radicaux contractés au cours de cette réduction, ne peuvent être qu'internes aux différents ε_i ($1 \le i \le n$), $\varepsilon_i \overset{*}{\to} \eta_q^i$.

En résumé (voir fig. 1), on a $\varepsilon_i \overset{*}{\to} \eta_q^i$ et une réduction sûre (i) issue de η_q^i et $M_i = \mathrm{Min}\ (a_i, \eta_p^i)$. Comme $||M_i|| < ||M||$, par récurrence nous avons $M_i = a_i$. Par conséquent :

$$\begin{aligned} M &= \lambda x_1x_2 \dots x_m.xM_1M_2 \dots M_n \\ &= \lambda x_1x_2 \dots x_m.xa_1a_2 \dots a_n \\ &= a \end{aligned}$$

□

2.10 <u>Corollaire</u> :

Toute réduction sûre est une bonne réduction.

<u>Démonstration</u> :

Immédiate par application du théorème précédent. Pour toute expression ε, on a $\varepsilon \overset{*}{\rightarrow} \varepsilon$. Et si :

$$\varepsilon \rightarrow \varepsilon_1 \rightarrow \varepsilon_2 \rightarrow \dots \varepsilon_n \rightarrow \dots$$

est une réduction sûre, on a $\varepsilon \equiv \bigsqcup_{n=0}^{\infty} \phi\varepsilon_n$, d'après le théorème précédent. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] Barendregt H.,P.,"Some extensional term models for combinatory logics and λ-calculi",PhD Thesis,Utrecht(1971)

[2] Cadiou J.,M.,"Recursive definitions of partial functions and their computation", PhD Thesis,Stanford(1972)

[3] Mc Carthy J. et al.,"LISP 1.5 Programmer's manual",MIT Press,Cambridge(1962)

[4] Church A.,"The calculi of lambda-conversion",Annals of Math.Studies,n°6, Princeton(1941)

[5] Courcelle B.,Kahn G.,Vuillemin J.,"Algorithmes d'équivalence et de réduction à des expressions minimales dans une classe d'équations récursives simples",Rapport IRIA-LABORIA n°37(1973)

[6] Courcelle B.,Vuillemin J.,"Semantics and axiomatics of a simple recursive language", Proc.SIGACT Symposium,Seatle,W.(1974)

[7] Curry H.B.,Feys R.,"Combinatory logic",Vol.1,North-Holland(1958)

[8] Curry H.B.,Hindley J.R.,Seldin J.P.,"Combinatory logic",Vol.2

[9] Landin P.J.,"A correspondence between ALGOL 60 and Church's lambda notation", CACM,(Feb-Mar 1965)

[10] Manna Z.,Ness S.,Vuillemin J.,"Inductive methods for proving properties of programs",Proc.SIGACT Symposium,Las Cruces,N.M.(1972)

[11] Milner R.,"Processes;A model of computing agents",University of Edinburgh, Internal report(1973)

[12] Morris J.H.,"Lambda-calculus models of programming languages",PhD Thesis,MIT, Cambridge(1968)

[13] Nederpelt R.P.,"Strong normalization in a typed lambda caculus with lambda structured types"Phd Thesis,Eindhoven(1973)

[14] Nivat M.,"Sur l'interprétation des shémas de programmes monadiques",Rapport IRIA LABORIA n°1(1972)

[15] Nolin L.,Cours de DEA,Université de Paris VII

[16] Scott D.,"Outline of a mathematical theory of computation",Technical monograph, PRG-2,Oxford(1970)

[17] Scott D.,"Continuous lattices",Technical monograph,PRG-7,Oxford(1971)

[18] Scott D.,Strachey C.,"Towards a mathematical semantics for computer languages", Technical monograph,PRG-6,Oxford(1971)

[19] Vuillemin J.,"Proof techniques for recursive programs",PhD Thesis,Stanford(1973)

[20] Vuillemin J.,"Syntaxe,sémantique et axiomatique d'un langage de programmation simple",Thèse d'état,Université de Paris VII(à paraître 1975)

[21] Wadsworth C.P.,"Semantics and pragmatics of the lambda calculus",PhD Thesis, Oxford(1971)

[22] Welch P.,"A problem of lambda calculus",Essex,Communication personnelle(1973)

[23] Welch P.,"Another problem of lambda calculus",Essex,Communication personnelle(1973)