INF 421 — 03 Luc Maranget

Un peu de listes

Piles, Files

Luc.Maranget@inria.fr
http://www.enseignement.polytechnique.fr/profs/informatique/Luc.Maranget/421/

Détour : les sacs

Les piles et les files sont des cas particuliers des *sacs*.

Les opérations suivantes sont définies sur les sacs

- Le sac est-il vide ?
- Ranger dans le sac,
- Sortir un élément du sac (un des éléments rangés au préalable).

Le sac typique (en style objet) :

```
class Bag {
  ...
  Bag () { ... }
  boolean isEmpty() { ... }
  void put(Object o) { ... }
  Object get() { ... }
}
```

Remarquer : Le sac est une structure mutable.

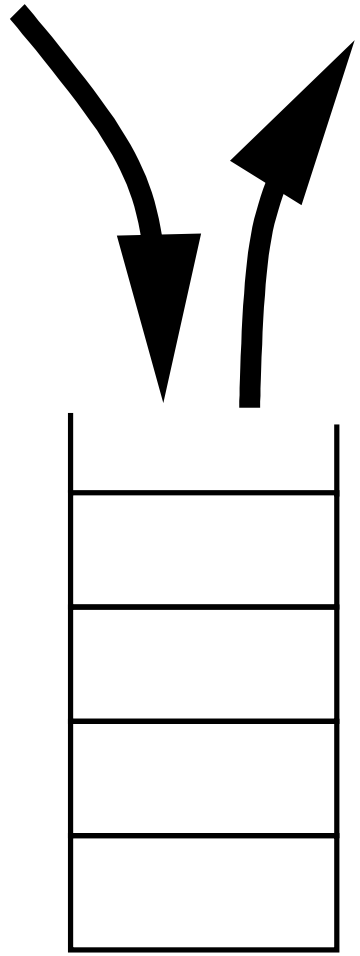
Les piles et les files

Piles et files sont des sacs munis de règles supplémentaires reliant les sorties et les entrées :

- Les piles sont des sacs « évangéliques » : dernier entré, premier sorti (ou LIFO : Last In, First Out).
  - En ce cas, `put` se dit souvent `push` (empiler) et `get` se dit souvent `pop` (dépiler).
- Les files sont des sacs égalitaires : premier entré, premier sorti (ou FIFO : First In, First Out).
  - En ce cas, `put` peut se dire enfiler et `get` peut se dire défiler.

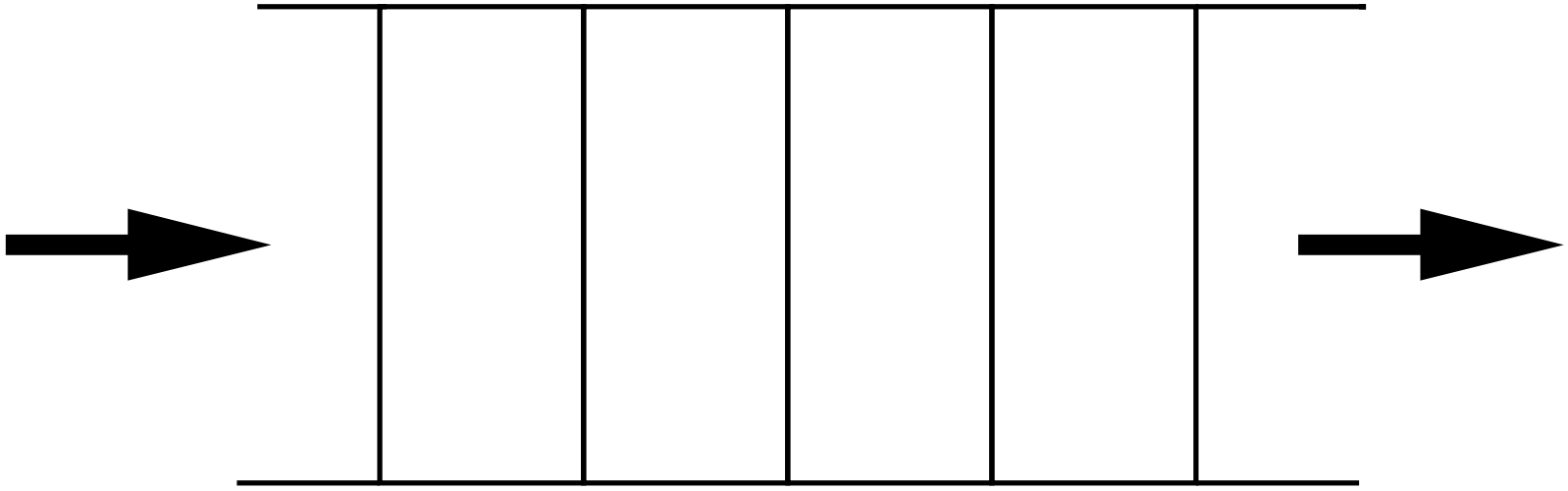
La pile

La pile



La file

La file



À quoi ça sert ?

La file est la structure la plus intuitive.

La file sert par exemple, dans un système d'exploitation, à servir des demandes d'impression dans l'ordre.

- Il y a une file `spool` des fichiers à imprimer.
- Chaque utilisateur demande l'impression d'un fichier f par :

  `...spool.put(`f`)...`

- Tandis qu'un acteur quelconque du système d'exploitation exécute (conceptuellement) la boucle suivante :

```
for ( ; ; ) { // Boucle infinie, comme « while (true) { »
  if (!spool.isEmpty()) {
    Fichier f = spool.get() ;
    ... // Réellement envoyer f à l'imprimante.
  }
}
```

À quoi ça sert ?

La pile est la structure la plus « informatique ».

Son besoin se fait clairement sentir dans la situation suivante...

- Un cuisinier fait une sauce...
  - Chef, votre épouse au téléphone ! Mettre la sauce en attente (empiler(sauce)) et répondre...
    - Chef, il y a le feu ! Mettre le téléphone en attente (empiler(téléphone)) et aller éteindre le feu.
    - Le feu est éteint...
  - Dépiler la tâche en attente (téléphone) et la terminer...
- Dépiler la tâche en attente (sauce) et la terminer.

Autre utilisation des piles

Évaluation des expressions arithmétiques.

Soit les piles d'entiers :

```
class Stack {
  ...
  Stack () { ... }
  boolean isEmpty() { ... }
  void push(int i) { ... }
  int pop() { ... }
}
```

Les calculettes en notation postfixe (ou « polonaise ») fonctionnent à l'aide d'une pile, selon ce principe :

- Un entier $\rightarrow$ l'empiler.
- Une opération $\oplus$, depiler x, dépiler y, empiler $\oplus(y, x)$.

Exemples de calcul en notation postfixe

Calculer $1 + (2 \times 3)$: `1 2 3 * +` (ou `2 3 * 1 +` d'ailleurs).

$$\boxed{} \to 1 \to \boxed{1} \to 2 \to \boxed{\begin{matrix}2\\1\end{matrix}} \to 3 \to \boxed{\begin{matrix}3\\2\\1\end{matrix}} \to \times \to \boxed{\begin{matrix}6\\1\end{matrix}} \to + \to \boxed{7}$$

Calculer $(1 + 2) \times 3$: `1 2 + 3 *`

$$\boxed{} \to 1 \to \boxed{1} \to 2 \to \boxed{\begin{matrix}2\\1\end{matrix}} \to + \to \boxed{3} \to 3 \to \boxed{\begin{matrix}3\\3\end{matrix}} \to \times \to \boxed{9}$$

Une réalisation de la calculette

```
class Calc {
  public static void main (String [] arg) {
    Stack stack = new Stack () ;
    for (int i = 0 ; i < arg.length ; i++) {
      String cmd = arg[i] ;
      if (cmd.equals("+")) {
        int x = stack.pop(), y = stack.pop() ;
        stack.push(y+x) ;
      } else if ...
      // Idem pour "*", "/", "-"
      } else {
        stack.push(Integer.parseInt(cmd)) ; // doc[a]
      }
    }
    System.out.println(stack.pop()) ;
  }
}
```

[a] http://java.sun.com/j2se/1.5.0/docs/api/java/lang/Integer.html

Exécution de `Calc`

```
% java Calc 1 2 + 3 '*'
1 -> [1]
2 -> [1, 2]
+ -> [3]
3 -> [3, 3]
* -> [9]
9
```

Mais...

```
% java Calc 1 +
1 -> [1]
Exception in thread "main" java.util.EmptyStackException
        at java.util.Stack.peek(Stack.java:79)
        at java.util.Stack.pop(Stack.java:61)
        at Calc.main(Calc.java:9)
```

Précisions sur la notation postfixe

Par définition, une notation postfixe est une suite de symboles P.

$$\begin{array}{rcl} P & = & \mathbf{int} \\ & | & P_1\ P_2\ \mathbf{op} \end{array}$$

Par exemple :

$$\underbrace{\mathbf{0}}\ \underbrace{\underbrace{\mathbf{1}\ \mathbf{2}\ +}\ \underbrace{\mathbf{3}}\ \mathbf{*}}\ \mathbf{-}$$

Par définition, la valeur d'une notation postfixe est :

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{v}(\mathbf{int}) & = & int \\ \mathsf{v}(P_1\ P_2\ \mathbf{op}) & = & op(\mathsf{v}(P_1), \mathsf{v}(P_2)) \end{array}$$

Correction du calcul

Modélisons le programme `Calc`. Son état : $\langle\ \mathcal{I}\ \bullet\ \mathcal{S}\ \rangle$.

- L'entrée $\mathcal{I}$, c'est-à-dire une suite de symboles.
- La pile $\mathcal{S}$ (d'entiers).

Une action consiste à lire le symbole.

$$\langle\ \mathbf{int}\,\mathcal{I}\ \bullet\ \mathcal{S}\ \rangle \quad\to\quad \langle\ \mathcal{I}\ \bullet\ \mathcal{S}, int\ \rangle$$
$$\langle\ \mathbf{op}\,\mathcal{I}\ \bullet\ \mathcal{S}, v_1, v_2\ \rangle \quad\to\quad \langle\ \mathcal{I}\ \bullet\ \mathcal{S}, op(v_1, v_2)\ \rangle$$

Théorème Si $\mathcal{I}$ est une notation postfixe P, alors la pile $\mathcal{S}$ contient $\mathsf{v}(P)$ à la fin.

$$\langle\ P\ \bullet\ \rangle \to^* \langle\ \bullet\ \mathsf{v}(P)\ \rangle$$

Lemme Pour toute suite de symboles $\mathcal{I}$, toute pile $\mathcal{S}$, et toute notation postfixe :

$$\langle\ P\,\mathcal{I}\ \bullet\ \mathcal{S}\ \rangle \rightarrow^* \langle\ \mathcal{I}\ \bullet\ S, \mathsf{v}(P)\ \rangle$$

Démonstration Par induction (sur P). Dans le cas $P = P_1\ P_2\ \mathbf{op}$.

$$\begin{aligned}
\langle\ P\,\mathcal{I}\ \bullet\ \mathcal{S}\ \rangle &= \langle\ P_1\,P_2\,\mathbf{op}\,\mathcal{I}\ \bullet\ \mathcal{S}\ \rangle \\
&\rightarrow^* \langle\ P_2\,\mathbf{op}\,\mathcal{I}\ \bullet\ \mathcal{S}, \mathsf{v}(P_1)\ \rangle \\
&\rightarrow^* \langle\ \mathbf{op}\,\mathcal{I}\ \bullet\ \mathcal{S}, \mathsf{v}(P_1), \mathsf{v}(P_2)\ \rangle \\
&\rightarrow \langle\ \mathcal{I}\ \bullet\ \mathcal{S}, \mathit{op}(\mathsf{v}(P_1), \mathsf{v}(P_2))\ \rangle \\
&= \langle\ \mathcal{I}\ \bullet\ \mathcal{S}, \mathsf{v}(P)\ \rangle
\end{aligned}$$

Pile et appel de méthode

Revenons sur la fusion récursive qui échoue par « *débordement de la pile* » pour des listes assez longues.

```
static List merge(List xs, List ys) {
  if (xs == null) {
    return ys ;
  } else if (ys == null) {
    return xs ;
  } // NB: désormais xs != null && ys != null
    else if (xs.val <= ys.val) {
    return new List (xs.val, merge(xs.next, ys)) ;
  } else { // NB: ys.val < xs.val
    return new List (ys.val, merge(xs, ys.next)) ;
  }
}
```

Appel de méthode

En simplifiant un peu.

- Le système d'exécution Java dispose d'une pile.
- Pour appeler une méthode :
  - Empiler une *addresse de retour*.
  - Empiler les arguments de la méthode.
- Une méthode
  - Prélude : récupérer les arguments.
  - Code de la méthode proprement dit... qui rend la pile dans l'état où il l'a trouvée.
  - Postlude : (pour revenir)
    - Dépiler l'adresse de retour.
    - Empiler le résultat de la méthode.
    - Transférer le contrôle du programme à l'adresse de retour.

Dans le cas qui nous occupe

Nous allons modéliser un processeur en Java, et examiner ce que fait le code compilé de `merge`.

- Toutes les variables sont globales (registres).
- Le contrôle est explicite (code = séquence d'instructions).
  - Il y a des étiquettes (points dans l'exécution).
  - Il y a des instructions « **goto** » (transfert direct) et « **goto*** » (transfert indirect).

```
merge: // « Étiquette » de début de la méthode.
/* La pile S est P, ret, xs, ys
   Il faut rendre P, merge(xs, ys) */
  ys = S.pop() ;
  xs = S.pop() ;
  if (xs == null) {
    lab = S.pop() ; S.push(ys) ; goto* lab ;
  } ...
```

Appel récursif

```
   ⋮
/* La pile S est P, ret
   Il faut rendre P, merge(xs, ys) */
  if (xs.val <= ys.val) {
     S.push(xs.val) ; // Sauver xs.val dans la pile
     S.push(lab1) ; S.push(xs.next) ; S.push(ys) ;
     // S est P, xs.val, lab1, xs.next, ys
     goto merge ; // Appel récursif
   lab1:
     // S est P, merge(xs.next, ys)
     r = S.pop() ;          // Résultat de l'appel
     xsPointVal = S.pop() ; // xs.val sauvé avant l'appel
     lab = S.pop() ;        // Étiquette de retour
     S.push(new List (xsPointVal, r)) ;
     goto* lab ; // La pile est P, merge(xs, ys) ok.
  } ...
```

Codage des piles (d'entiers)

Le principe est le suivant :

- L'objet pile (classe `Stack`) maintient une liste (privée) d'entiers.
- Opérations :
  - Ajouter au début de la liste,
  - Enlever du début de la liste.

```
class Stack {
  private List me ;
  Stack () { me = null ;  }
  boolean isEmpty() { return me == null ; }
  ...
}
```

Diversion : modificateurs de visibilité

Le champ `me` des objets `Stack` est déclaré **private**.

```
class Stack {
  private List me ; ...
```

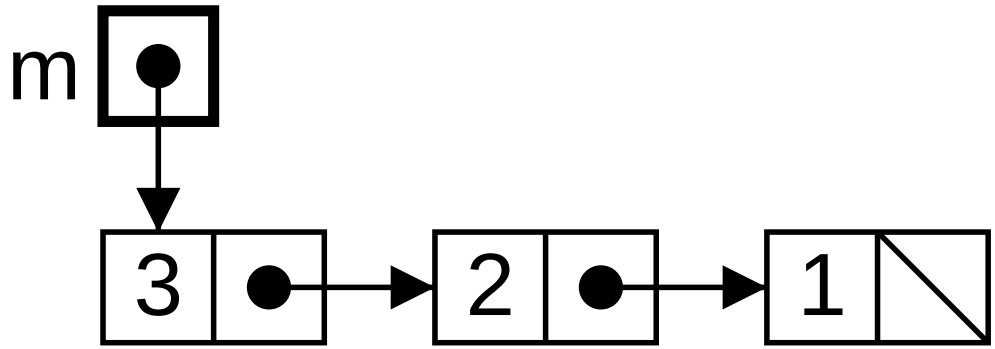
En effet, il ne faut pas que qui que ce soit d'autre (que l'objet `Stack`) utilise `me`.

Les modificateurs, du plus restrictif au plus permissif.

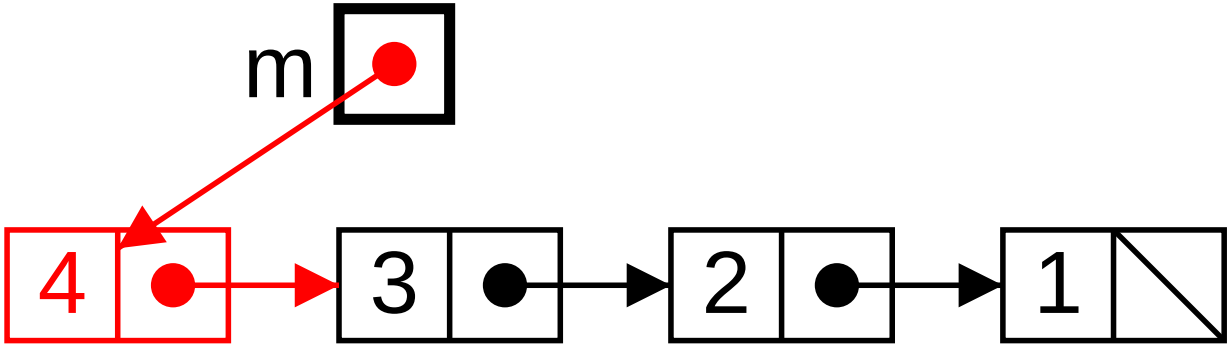
- **private**, visible de la classe uniquement.
- rien, visible du *package* (un paquet de classes).
- **protected** visible des héritiers (une nouvelle notion).
- **public** visible de partout.

Puisque nous n'utilisons ni package, ni héritage, on se limite à **private** et à rien. (sauf pour **public static void** `main`).

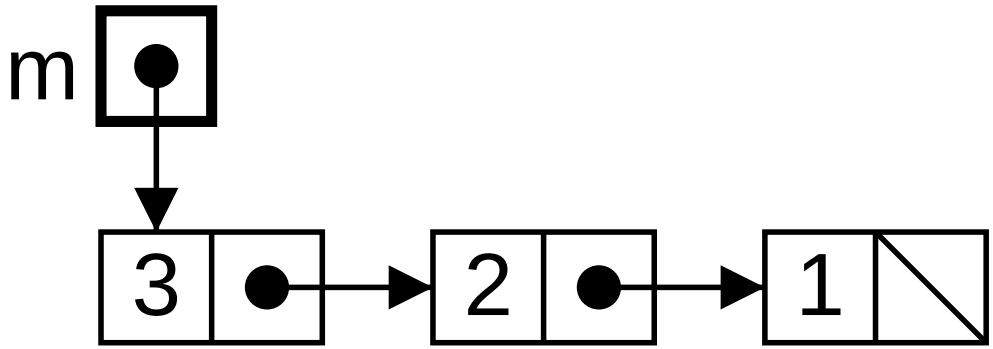
Empiler : ajouter au début



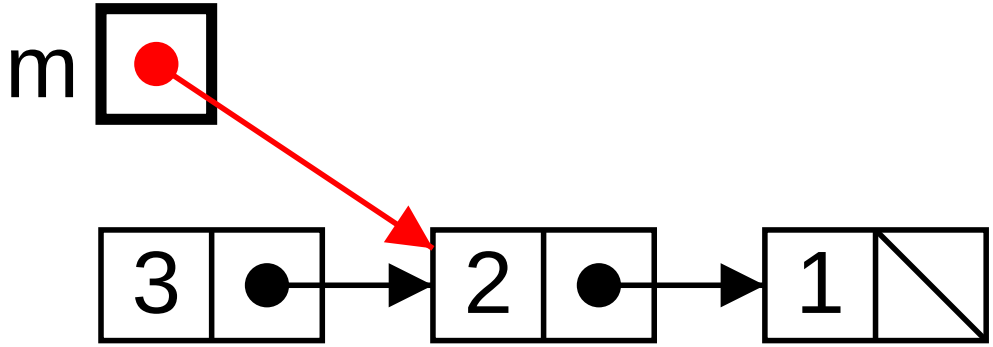

```
me = new List (4, me) ;
```



Dépiler : enlever du début




```
me = me.next ;
```



Code de push et pop

```
void push(int i) {
  me = new List (i, me) ;
}

int pop() {
  if (me == null) throw new Error("Pile Vide") ;
  int r = me.val ;
  me = me.next ;
  return r ;
}
```

Remarquer « **throw new** `Error(...)` » qui interrompt le programme en *lançant* (instruction **throw**) une *exception* (ici objet de la classe `Error`).

Diversion : programmation des erreurs

Si l'effet attendu d'une erreur est de faire échouer le programme, on se demande bien l'intérêt de l'exception.

```
System.err.println("Erreur : pile vide") ; // NB sortie d'erreur
System.exit(2) ;                          // Tout arrêter
```

Mais on veut pouvoir réparer les erreurs dans le programme.

Or, une exception est un résultat innattendu, qui passe par tous les appels en attente.

```
% java Calc 1 +
1 -> [1]
Exception in thread "main" java.util.EmptyStackException
        at java.util.Stack.peek(Stack.java:79)
        at java.util.Stack.pop(Stack.java:61)
        at Calc.main(Calc.java:9)
```

Et on peut « attraper » l'erreur au passage.

Signaler une erreur

Déclarer une classe de nos exceptions (plus propre).

```
class StackEmpty { } extends Exception
```

Lancer notre exception.

```
int pop() throws StackEmpty { // Obligatoire ici
   if (me == null) throw new StackEmpty () ;
 ...
```

Note : Le code la classe `Stack` se contente de signaler l'erreur.

Cette classe n'est pas modifiable (par ex. code de la bibliothèque).

Traiter l'erreur

Comme la vraie calculette HP: une pile « vide » contient en fait $0, 0, \ldots$

Attraper l'exception ($\sim$ résultat exceptionnel) pour la rempacer par un résultat normal.

```
static int popStack(Stack s) {
  try {
    return s.pop() ;
  } catch (StackEmpty e) {
    return 0 ;
  }
}
```

Et appeler `popStack(`s`)` en place de s`.pop()`. dans `Calc`.

Réalisation des files

Le principe est le suivant, l'objet file maintient une liste (privée) d'entiers.

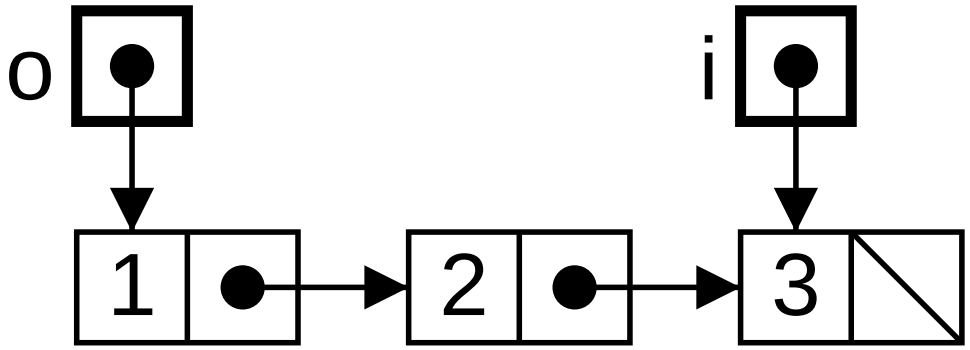
- Ajouter à la fin,
- Enlever du début.

Pour réaliser ces opérations en temps constant il nous faut deux références :

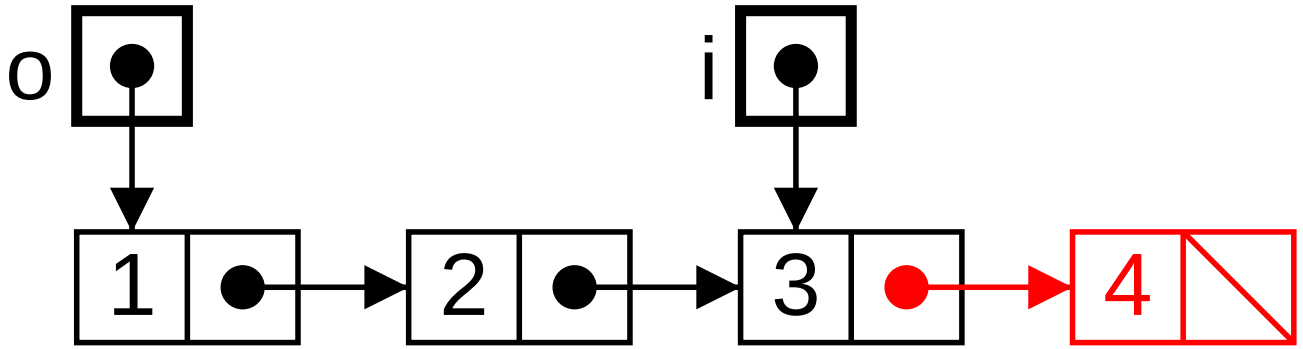
- `in` sur la dernière cellule de liste (pour ajouter).
- `out` sur la première cellule de liste (pour enlever).

```
class Fifo {
  private List in, out ;
  Fifo () { in = out = null ; }
  boolean isEmpty() { return in == null && out == null ; }
  ...
}
```

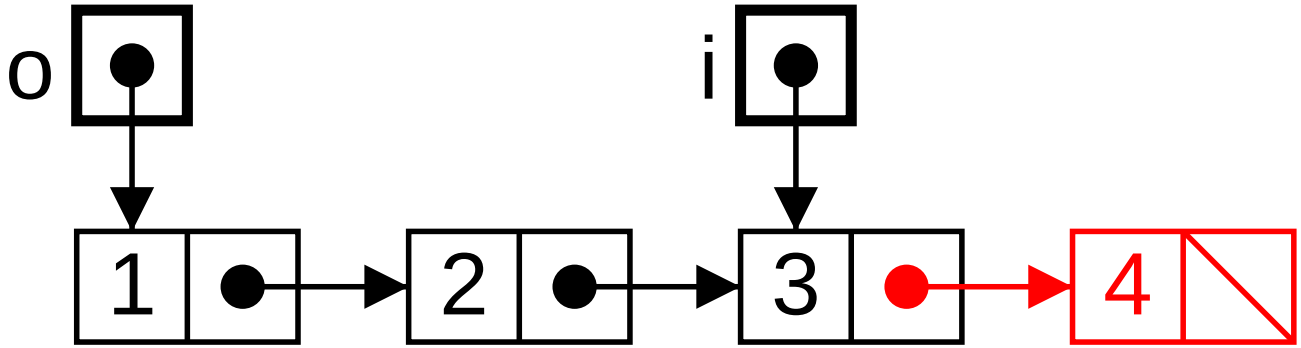
Enfiler : ajouter à la fin



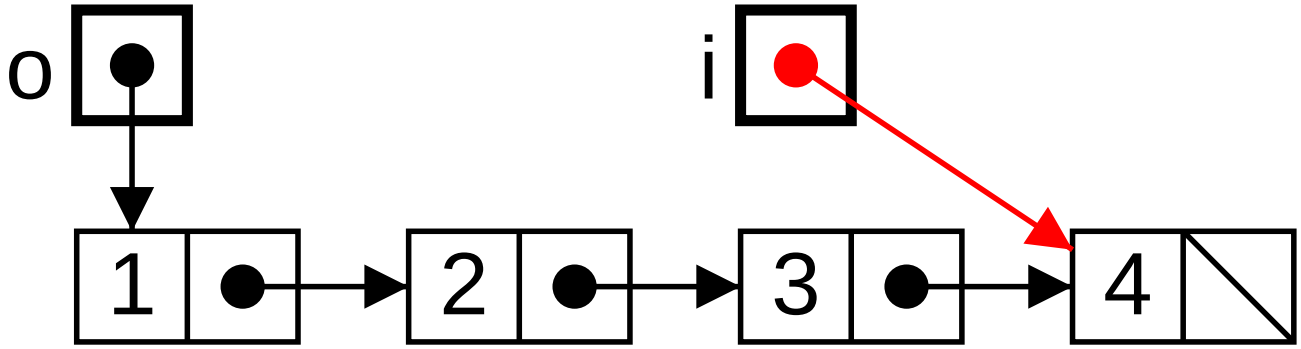

```
in.next = new List (4, null) ;
```



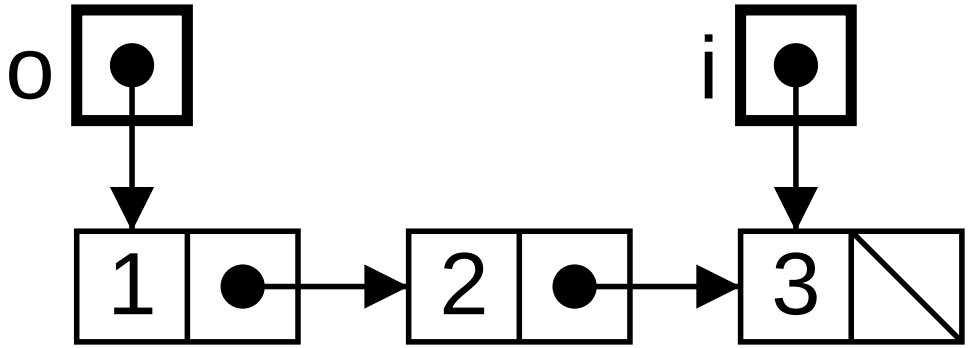
Enfiler : ajouter à la fin (suite)



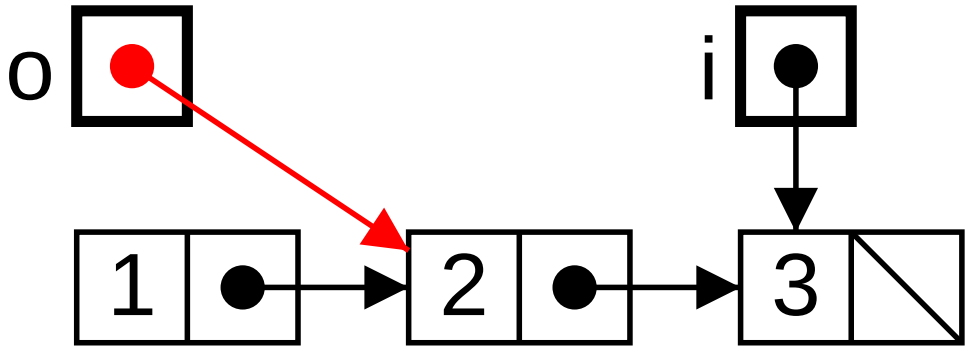

```
i = i.next ;
```



Défiler : enlever du début




```
out = out.next ;
```



Code complet d'enfiler

Le code final doit tenir compte des files vides.

```
void enfiler(int i) {
   if (isEmpty()) {
     in = out = new List (i, null) ;
   } else {
     in.next = new List (i, null) ;
     in = in.next ;
   }
}
```

Il en va de même pour défiler (attention à bien remettre `in` à **null** en cas de défilage du dernier élément.)

Autre réalisation des piles/files

Pile et files peuvent également être codées à l'aide de tableaux.

Voici l'exemple des piles :

```
class Stack {
  private final static int SZ=32 ; // Taille de pile
  private int [] t ;
  private int sp ; // « pointeur de pile »
  Stack() { t = new int[SZ] ; sp = 0 ; }
  ...
}
```

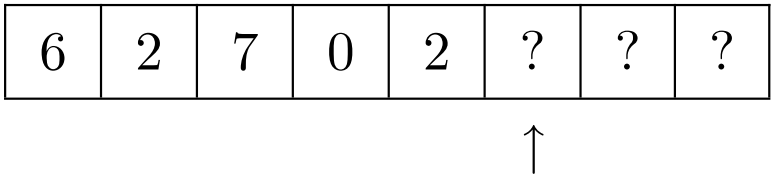
Principe : le tableau est rempli de 0 à `sp-1`.

- `pop : sp = sp-1 ;`
- `push(x) : t[sp] = x ; sp = sp+1 ;`

La pile avec un tableau

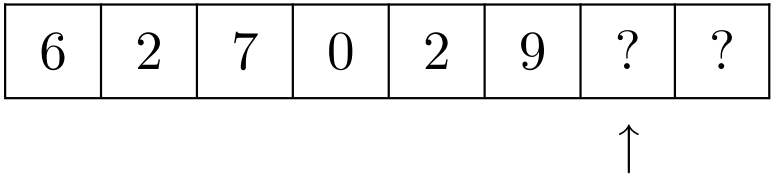
```
class Stack {
  ...
  boolean isEmpty() { return sp <= 0 ; } // Expression booléenne

  int pop() {
    if (isEmpty()) throw new Error ("Pile vide") ;
    return t[--sp] ; // pour sp = sp-1 ; return t[sp] ;
  }

  void push(int x) {
    if (sp >= t.length) {
      throw new Error ("Pile pleine") ; // Comme Java!
    }
    t[sp++] = x ; // Pour t[sp] = x ; sp = sp+1 ;
  }
}
```

Exemple de pile tableau



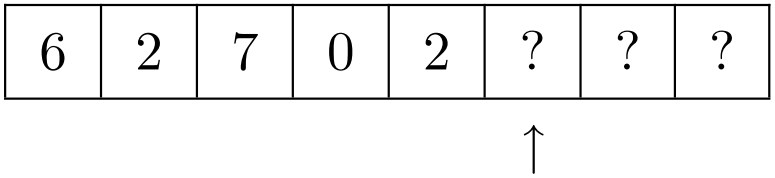
sp=5

Empiler 9



sp=6

Dépiler



sp=5

Redimensionnement automatique

Il est dommage de limiter la taille des piles à priori.

Profitons des tableaux « dynamiques » de Java.

```
// Double la taille du tableau interne
  private void resize() {
    if (sp >= t.length) {
      int [] newT = new int [2*t.length] ; // Allouer
      for (int i = 0 ; i < sp ; i++) {
        newT[i] = t[i] ;
      } // Copier t[0..sp] -> newT[0..sp]
      t = newT ; // t référence vers nouveau tableau
    }
  }

  void push(int x) {
    resize() ; t[sp++] = x ;
  }
```

Coût de `push` en cas de redimensionnement

Jusqu'ici `push` et `pop` s'exécutaient en temps constant.

Ce n'est plus le cas : `push` peut maintenant prendre un temps arbitrairement long.

Mais `push` est toujours en $O(1)$ « amorti ».

- Un programme fait N fois `push`.
- Le tableau est initialement de taille 2^{p_0}.
- Au pire le tableau est redimensionné $p + 1 - p_0$ fois ($2^p < N \leq 2^{p+1}$). Pour un coût total de l'ordre de :

$$2^{p_0} + 2^{p_0+1} + \cdots + 2^{p+1} < 2^{p+2} < 4 \cdot N$$

- Le coût de N `push` est en $O(N)$.
- Le coût *amorti* d'un `push` est en $O(1)$ (coût total/nb `push` $<$ cst).

Les piles toutes faites

La pile est une structure tellement utile, que la bibliothèque Java la propose, classe `Stack`, package `java.util`

Mais des piles de quoi ?

- La classe `Stack` est une classe « *générique* » qui prend une classe en argument.
- Les objets de la classe `Stack<`C`>` sont des piles de C, où C est une classe arbitraire.

Par exemple `Stack<String>`, `Stack<List>`, ...

Voir la doc[a]

[a] `http://java.sun.com/j2se/1.5.0/docs/api/overview-summary.html`

Exemple, pile de `String`

Notation postfixe → Notation infixe (usuelle).

```
import java.util.* ; // Stack est java.util.Stack
class Infix {
  public static void main (String [] arg) {
    Stack<String> stack = new Stack<String> () ;
    for (int k = 0 ; k < arg.length ; k++) {
      String x = arg[k] ;
      if (x.equals("+") || ...) {
        String i1 = stack.pop(), i2 = stack.pop() ;
        stack.push("(" + i2 + x + i1 + ")") ;
      } else {
        stack.push(x) ;
      }
      System.err.println(x + " -> " + stack) ;
    }
    System.out.println(stack.pop()) ;
  }}
```

Exemple de transformation

```
% java Infix 1 2 + 3 '*'
1 -> [1]
2 -> [1, 2]
+ -> [(1+2)]
3 -> [(1+2), 3]
* -> [((1+2)*3)]
((1+2)*3)
```

Piles de scalaires

Dans `Stack<`C`>` C est une classe.

On ne peut pas faire des piles `Stack<`**`int`**`>`.

Mais on peut faire des piles `Stack<Integer>`, où `Integer` est une classe fournie par défaut (package `java.lang`).

Deux méthodes utiles :

- **public static** `Integer valueOf(`**int** `i)`, du scalaire vers l'objet.
- **public int** `intValue()`, et réciproquement.

Il y a des classes semblables (`Char`, `Short` etc.) pour tous les types scalaires (**char**, **short** etc.)

La calculette avec pile de la bibliothèque

Cela semble assez lourd.

```
import java.util.* ;
class Calc {
  public static void main (String [] arg) {
    Stack<Integer> stack = new Stack<Integer> () ;
    ...
        int i1 = stack.pop().intValue() ;
        int i2 = stack.pop().intValue() ;
        stack.push(Integer.valueOf(i2+i1)) ;
    ...
  }
}
```

La calculette avec pile de la bibliothèque II

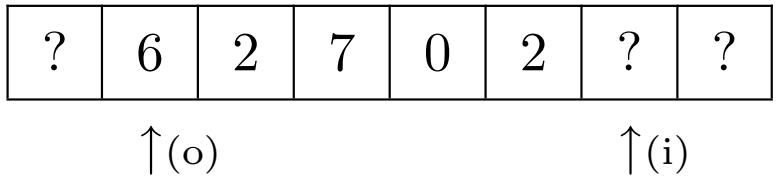
Mais en fait le compilateur sait faire les conversions **int** $\leftrightarrow$ `Integer` tout seul.

```
import java.util.* ;
class Calc {
  public static void main (String [] arg) {
    Stack<Integer> stack = new Stack<Integer> () ;
    ...
        int i1 = stack.pop(), i2 = stack.pop() ;
        stack.push(i2+i1) ;
    ...
  }
}
```

Attention, le code qui s'exécute est bien par exemple `stack.push(Integer.valueOf(i2+i1))`.

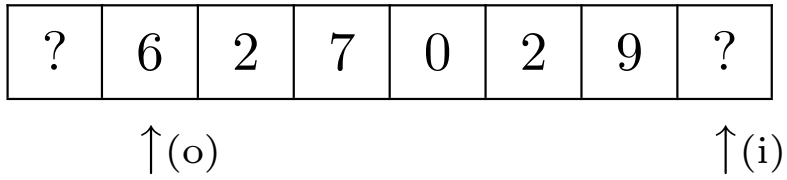
Une file dans un tableau, principe

Deux champs privés, **int** `in` et **int** `out`. La file va de la case `out` à la case `in-1`.



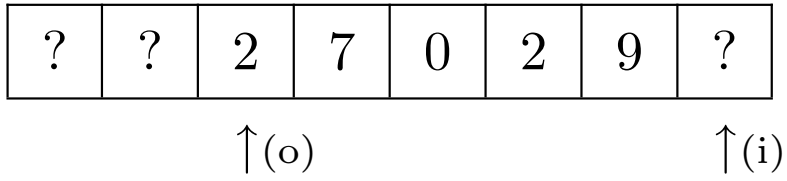
out=1, in=6

Enfiler 9



out=1, in=7

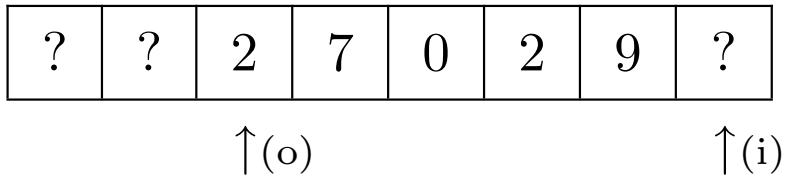
Défiler



out=2, in=7

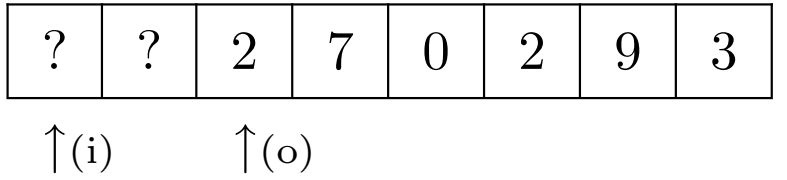
File dans le tableau, difficulté I

Le tableau est « circulaire »



out=2, in=7

Enfiler 3



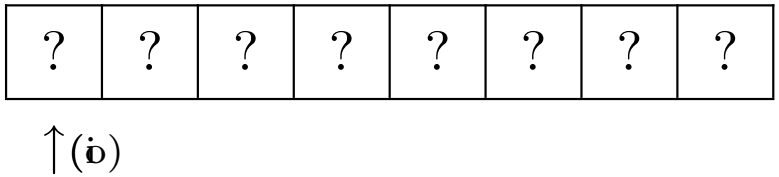
out=1, in=0

Solution, incrémenter modulo la taille du tableau.

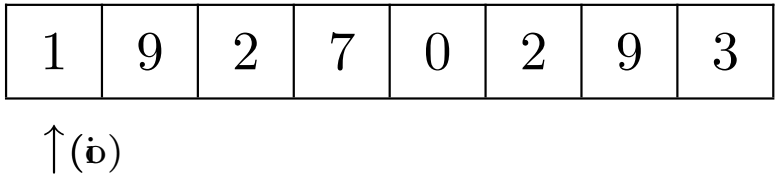
File dans le tableau, difficulté II

`in` et `out` ne suffisent pas toujours.

Une file vide



Une file pleine



Solution, conserver une information additionelle : le nombre d'éléments de la file.

Files de la bibliothèque

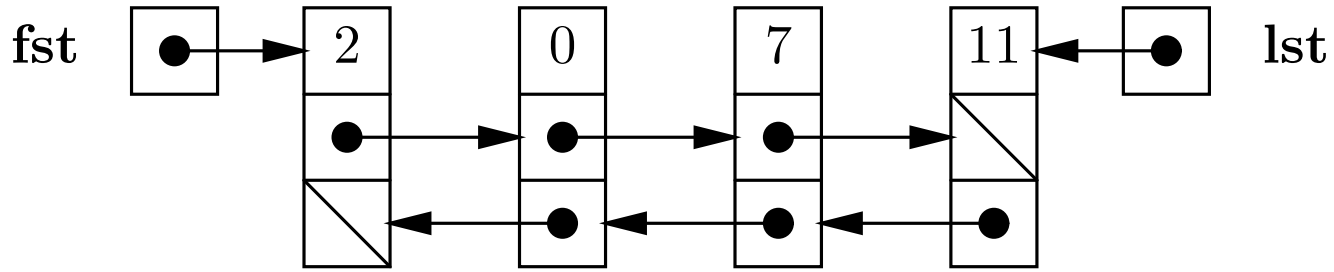
Une classe commode `LinkedList<`C`>` (package `java.util`) convient, il s'agit en fait d'une *double-ended queue*.

- Méthodes `addFirst` et `addLast` (`put`) pour ajouter un élément au debut ou à la fin.
- Méthodes `removeFirst` (`get`) et `removeLast` pour récupérer le premier ou dernier élément.
- Le tout en temps constant, par des listes doublement chaînées (voir le poly, section 2.3.3)

D'autres classes de bibliothèque existent avec des noms plus séduisants (`Queue`), mais `LinkedList<`C`>` est la plus commode.

Queue à deux bouts

Un petit exemple,



- Par les liens → on a facilement `removeFirst`/`addLast` — comme une file, en fait.
- Par les liens ← on a facilement `removeLast`/`addFirst` — par symétrie, file du dernier au premier élément.

Choix de l'implémentation

- Hors considérations de facilité ou d'efficacité, il n'y a pas à choisir : le service rendu est le même (type *abstrait* de données).
- Si on veut examiner la question...
  - Bibliothèque, aucun code à écrire, mais il faut lire la doc, et la comprendre.
  - Listes, grande souplesse.
  - Tableaux (redimensionné), à priori plus efficace, mais attention à l'occupation mémoire.

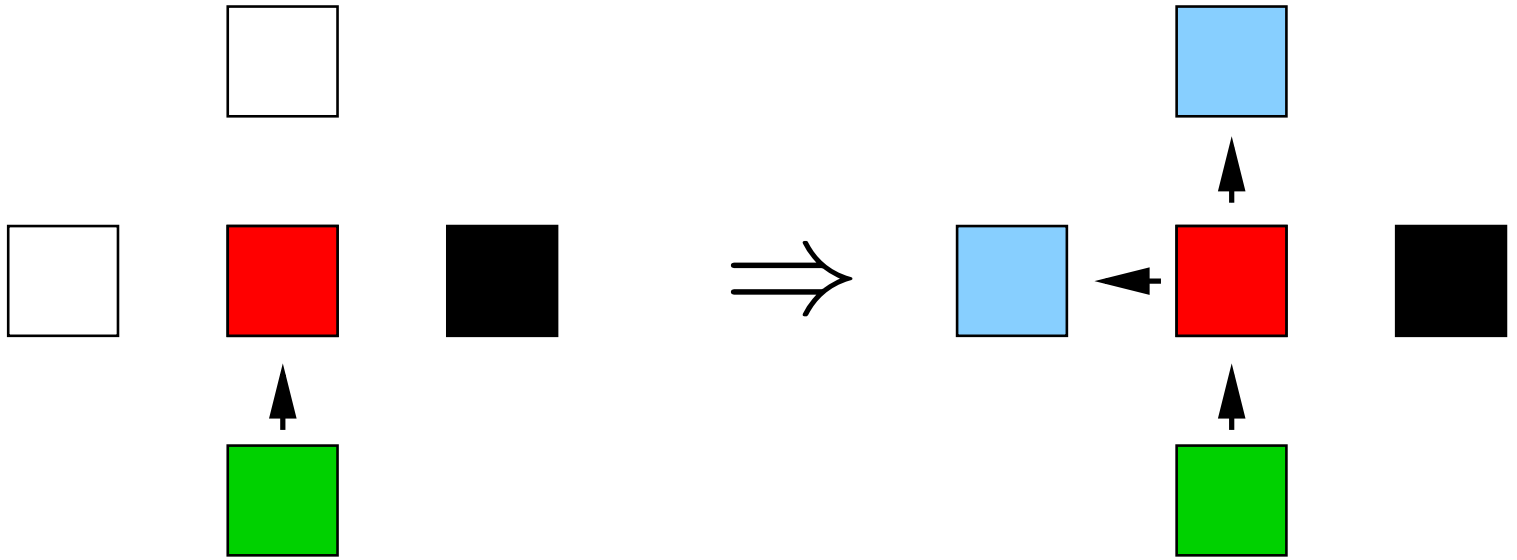
Une autre utilisation des files/piles

Soit un petit robot, perdu dans un labyrinthe, mais muni d'un sac (de cases) d'un pinceau et de trois couleurs. Le robot cherche la sortie ainsi :

```
bag.put(entrée) ;
while (!bag.isEmpty()) {
  Case case = bag.get() ;
  case.colorie(rouge) ;
  if (case.equals.(sortie)) return ;
  for ( ... ) { // Tous les voisins non-coloriés
    Case voisin = ... ;
    voisin.colorie(bleu) ;
    bag.put(voisin) ;
  }
  case.colorie(vert) ;
}
```

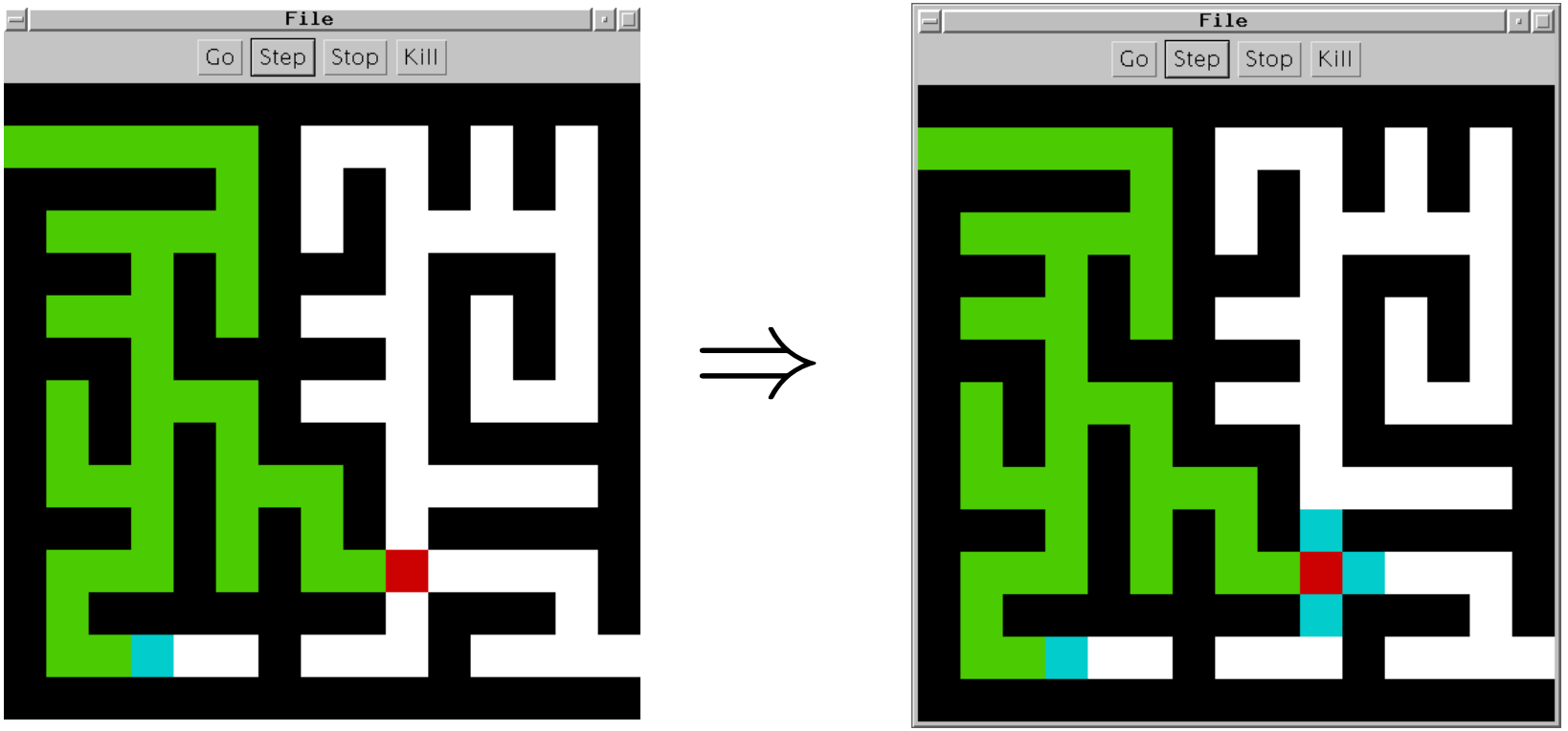
Rapport voisins/couleur

- La case rouge vient de sortir du sac,
- elle est nécessairement voisine d'au moins une case verte,
- la case noire indique un mur.

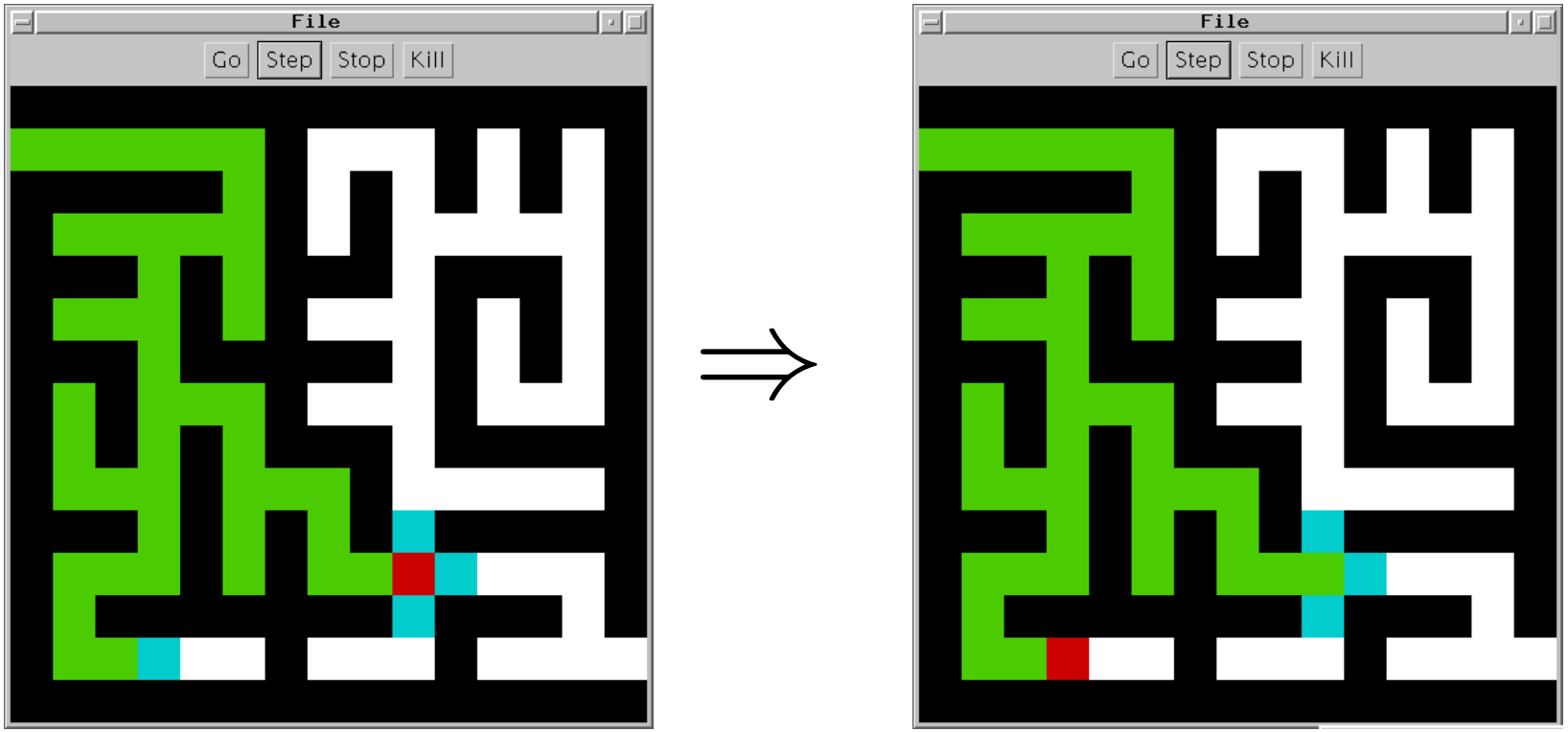


- Les deux cases voisines accessibles et non encore coloriées entrent dans le sac (en bleu).

Mettre les voisins dans le sac (file ici)



Sortir une case de la file



Noter : c'est la case la plus ancienne qui est sortie de la file.

Différents sacs, différents parcours

Sur un labyrinthe sans murs, l'effet est notable.

Pile

File